منشــورات جامعة دمشــق
كلية الهندسة الميكانيكية و الكهربائية

الدارات الكهربائية /١/

الدكتور نديم مخّـول
أستاذ في قسم الطاقة الكهربائية

الدكتور نبيل صبح
مدرس في قسم الطاقة الكهربائية

جامعة دمشق

١٤٢٧ - ١٤٢٨هـ
٢٠٠٦ - ٢٠٠٧م

الفهرس

الصفحة

مقــدمــة

Introduction

لقد تم إعداد هذا الكتاب لطلاب السنة الثانية — هندسة الطاقة الكهربائية في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية وفق مفردات المنهاج المعتمد لهذا المقــرر .

وقد راعينا أن يتضمن هذا الكتاب النواحي العلمية والتطبيقية العملية، وتوخينا أن يغطي المعلومات الأساسية للتيار الكهربائي وجريانه في دارات التيار المســتمر، و دارات التيار المتناوب الأحادي الطور ، كل ذلك بأسلوب تعليمي سلس موضّـح بالعلاقات الرياضية والأمثلة الحسابية بحيث يستطيع الطالب أن يمتلك قاعدة علمية قوية تساعده على فهم العديد من المسائل الكهربائية ومتابعتها.

يتألف هذا الكتاب من ستة فصول:

الفصل الأول: نعرض فيه التعريفات، والمفاهيم، والقوانين الأساسـية لدارات التيار المستمر، كما نعرض أنواع المنابع الكهربائية، بالإضافة إلى التعرف إلى الطرائق المعتمدة في حساب التيارات والتوترات في دارات التيار المستمر.

الفصل الثاني: نعرض في هذا الفصل كيفية توليـد التيـار المتنـاوب الأحادي الطور، كما نتعرف في هذا الفصل إلى التمثيل الجيبي للتيار المتنـاوب ورسم المنحنيات البيانية الزمنية لتوترات وتيارات كافة العناصر الخطية المكونـة للدارة الكهربائية ، ونتعرف أيضاً إلى التمثيل الشعاعي للتيار المتناوب، ورسـم المخططات الشعاعية لتوترات الدارة الكهربائية وتياراتها.

الفصل الثالث: نعرض في هذا الفصل التمثيل العقدي للتوابع الجيبيـة واستخدامه في حل مسائل التيار المتناوب، كما نتطرق فيه إلى تعمـيم كافـة

القوانين الأساسية، والطرائق المستخدمة في دارات التيار المستمر على دارات التيار المتناوب .

الفصل الرابع: نعرض في هذا الفصل الحلول البيانية لدارات التيار المتناوب، حيث نتطرق فيه إلى تحويل الدارة التسلسلية إلى تفرعية مكافئة، أو بالعكس، وذلك في الحالة العامة وفي حالات التقريب ، ويتم ذلك إما بشكل حسابي باستخدام العلاقات الرياضية، أو بشكل بياني وفق مقياس رسم مناسب، ونتطرق أيضاً إلى العناصر العملية المكونة للدارات الكهربائية وعلاقاتها مع التردد، وسوف نتعرف أيضاً إلى المحلات الهندسية للدارات الكهربائية ومقاليبها، وأخيراً نتطرق إلى مخطط الدائرة، واستخدامه لحل الدارات الكهربائية الخطية.

الفصل الخامس: نعرض في هذا الفصل ظواهر الطنين الكهربائي في الدارات التسلسلية و التفرعية، بالإضافة لرسم المحلات الهندسية لممانعة و سماحية دارة الطنين .

في الفصل السادس والأخير: نتعرف إلى الاستطاعة الكهربائية بكافة أنواعها في كل من التمثيل الجيبي و التمثيل العقدي، كما نلقي الضوء على نظرية نقل أكبر استطاعة ممكنة، بالإضافة إلى التعرف إلى طرائق تعويض الاستطاعة الردّية، أو ما يسمى تحسين عامل الاستطاعة.

لا بد من التنويه إلى أننا استعملنا في الكتاب الرموز اللاتينية والأعداد العربية المستخدمة من قبل الهيئات العالمية باعتبارها رموزاً ثابتة ومحددة لمختلف الكميات الكهربائية، كما زودنا الكتاب بالمصطلحات العلمية باللغتين العربية و الإنكليزية التي تفيد الطالب في دراسته لمقرر الدارات الكهربائية /١/.

يحتوي الكتاب عدداً من المسائل المحلولة في نهاية كل فصل منه، الغاية منها مساعدة الطالب على فهم الموضوعات النظرية المدروسة. كما يحوي عدداً

من المسائل غير المحلولة في كل فصل مع أجوبتها، الغاية منها التدرب الذاتي للطالب على استخدام المعرفة النظرية في حل المشكلات العملية.

آملين أن نكون قد قمنا بجزء من واجبنا تجاه الطلاب الأعزاء في قسم هندسة الطاقة الكهربائية، ونتمنى أن نكون قد وفقنا في تهيئة هذا الكتاب، وأعطينا الموضوعات المعالجة فيه حقها بحيث يحقق الهدف الموضوع من أجله .

دمشق أيار ٢٠٠٦

المؤلفان

الأستاذ الدكتور المهندس	**المدرس الدكتور المهندس**
نديم مخول	**نبيل صبح**

الفصل الأول

مقدمة وتذكرة في دارات التيار المستمر
Direct Current Circuit

١-١ :تعريفات وقوانين أساسية:

١-١-١ :الدارة الكهربائية Electrical Circuit:

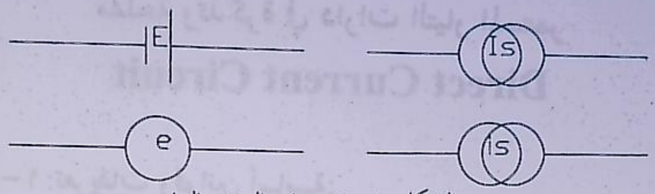
تعرف الدارة الكهربائية بأنها عدد من العناصر الكهربائية الموصلة مع بعضها البعض وفق شكل معين، بحيث تؤمن نقل التيار الكهربائي من جهة التوليد و إيصاله إلى جهة الاستهلاك. تسمى العناصر الكهربائية التي تقوم بتوليد القدرة الكهربائية العناصر الفعالة Active Elements (المدخرات ، المولدات ......) بينما تسمى العناصر التي تقوم باستهلاك القدرة الكهربائية العناصر غير الفعالة Passive Elements (المقاومات ، المكثفات ، الملفات، أسلاك التوصيل،....)

١-١-٢ :عناصر التوصيل الأساسية في الدارة:

إن عناصر التوصيل الأساسية المكونة للدارة الكهربائية[2] هي عناصر فعالة، وعناصر غير فعالة.

١-١-٢-١ : العناصر الفعالة:

هي العناصر التي تولد القدرة الكهربائية ونرمز لها بالرموز المبينة على الشكل (١-١).



الشكل (١-١) منابع التوتر والتيار

١-١-٢-٢: العناصر غير الفعالة:

هي عبارة عن العناصر التي تستهلك القدرة الكهربائية وأهمها:

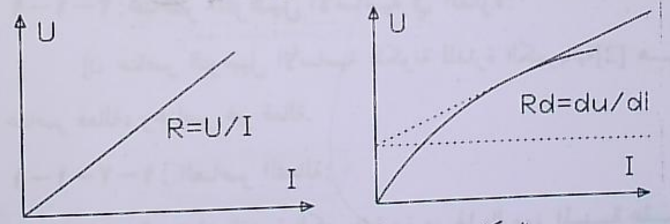
أ – المقاومة الكهربائية Electrical Resistance:

في المقاومة الكهربائية تحول القدرة الكهربائية إلى قدرة حرارية، والعلاقة التي تربط بين التوتر والتيار[4] هي:

$$U = I \cdot R \qquad (1,1)$$

حيث R المقاومة الأومية وتعطى بالعلاقة التالية:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} = \frac{l}{\gamma \cdot S} [\Omega] \qquad (1,2)$$



الشكل (١-٢-أ) المميزة البيانية للمقاومة

ب – المكثف الكهربائي Electrical Capacitor :

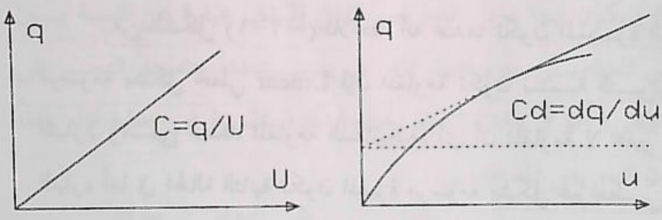
يختزن القدرة الكهربائية في الحقل الكهربائي الساكن المتشكل بين لبوسيه.

C السعة الكهربائية للمكثف الكهربائي وتعطى بالعلاقة التالية:

$$C = \frac{\varepsilon . s}{d} \quad (1,3)$$

العلاقة التي تربط بين التوتر المطبق على طرفي المكثف [4] و الشحنات الكهربائية المتجمعة هي:

$$C = \frac{q}{u} \quad (1,4)$$



الشكل (١-٢- ب) المميزة البيانية للمكثف

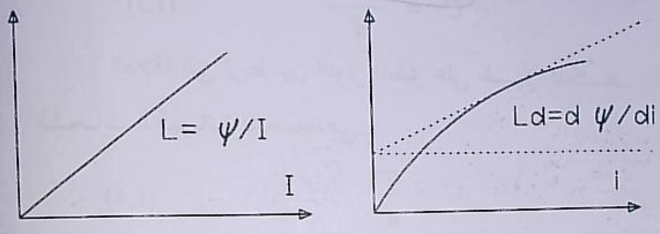
جـ - الملف الكهربائي Electrical Coil:

يختزن القدرة الكهربائية في الحقل المغناطيسي المتشكل في الملف،ويحسب عامل التحريض الذاتي للملف L [4] بالعلاقة التالية :

$$L = \frac{N^2}{R_m}[H] \quad (1,5)$$

المتولد، والتيار المار في الملف:

$$L = \frac{N.\phi}{I}[H] \qquad (1,6)$$



الشكل (١-٢- جـ) المميزة البيانية للملف

من الشكل (١-٢-أ) نلاحظ أنه عندما تكون المميـزة البيانيـة مرسومة بشكل خطي Linear فإن المقاومة تكون نـسبة التـوتر u إلى التيار i وتسمى عندئذ المقاومة الستاتيكية، أي أن المقاومة لا تتغير بـتغير التيار، أما في الحالة الثانية تكون المميزة مرسومة بشكل غيرخطـي non-linear فإن مشتق التوتر بالنسبة لقيمة محددة للتيار يـسمى المقاومـة الديناميكية ويرمز لها بالرمز R_d

$$R_d = \frac{du}{di} \qquad (1,7)$$

وهي تتناسب مع ميل المماس للمنحني $u = f(i)$ عند قيمة محـددة للتيار أي

$$R_d = k.tg\beta \qquad (1,8)$$

كذلك من الشكل (١-٢-ب) نلاحظ أنه عندما تكون المميزة البيانية مرسومة بشكل خطي فإن السعة هي النسبة بين الشحنات المتجمعة q على أحد اللبوسين إلى التوتر المطبق u بين هذين اللبوسين:

$$C = \frac{q}{u} \quad (1,9)$$

في هذه الحالة تسمى السعة الستاتيكية، أما في الحالة الثانية نلاحظ أن المميزة غير خطية و بالتالي فإن شدة التيار:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du} \cdot \frac{du}{dt} = C_d \frac{du}{dt} \quad (1,10)$$

أيضاً من الشكل (١-٢-جـ) نلاحظ أيضاً أن المميزة البيانية خطية ويكون فيها عامل التحريض الذاتي للملف عبارة عن النسبة بين الفيض المغناطيسي ψ و التيار المار i ويسمى عندئذ عامل التحريض الستاتيكي، أما في الحالة الثانية وعندما تكون المميزة غير خطية فإنه وفقاً لقانون التحريض المغناطيسي:

$$u = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{di} \cdot \frac{di}{dt} = L_d \frac{di}{dt} \quad (1,11)$$

ويسمى بعامل التحريض الذاتي الديناميكي و يتناسب هذا العامل مع ميل المماس للمنحني $\psi = f(i)$ عند قيمة محددة للتيار وبالتالي:

$$L_d = k .tg\, \beta \quad (1,12)$$

١-١-٣: التيار الكهربائي Electrical Current:

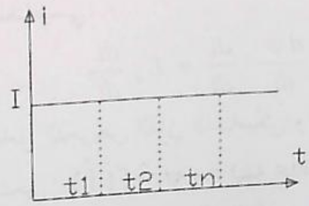
يعرف التيار الكهربائي بأنه تحرك الشحنات الكهربائية في اتجاه محدد وتحت تأثير قوة معينة، وعندما تكون هذه الحركة منتظمة وثابتة باتجاه واحد فإن التيار الكهربائي عندئذ يسمى التيار المستمر **Direct current** ، و في هذه الحالة يكون أحد قطبي المنبع موجباً بشكل دائم و القطب الآخر سالباً وبالتالي التيار يتدفق من القطب الموجب باتجاه القطب السالب عبر الحمل الموصل بينهما **[5]**.

ويمكن أن نعبر عن التيار الكهربائي بكمية كهربائية تسمى الشدة Current Intensity

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (1,13)$$

وبالنسبة للتيار المستمر

$$I = \frac{q}{t} \qquad (1,14)$$



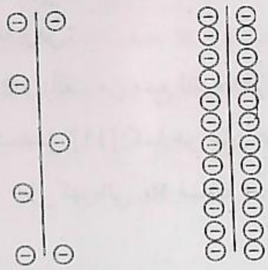
الشكل (١-٣) التيار المستمر

١-١-٤ :فرق الكمون الكهربائي Electrical Potential:

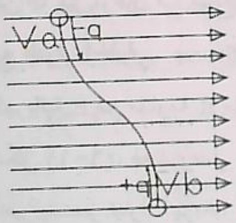
إن فرق الكمون الكهربائي هو الاختلاف أو التفاوت في التوضع الالكتروني بين قطبين أحدهما موجب و الآخر سالب [1].

ويمكن أيضاً تعريف فرق الكمون الكهربائي [10] بأنه النسبة بين العمل الكهربائي المنجز خلال نقل الشحنة الكهربائية q بين نقطتين تقعان ضمن مجال حقل كهربائي ساكن وبين قيمة تلك الشحنة وفق العلاقة التالية:

$$V_a - V_b = \frac{W}{q} \qquad (1,15)$$



الشكل (١-٤) الكمون الكهربائي



الشكل (١-٥) الكمون الكهربائي

هناك نوعان للكمون الكهربائي:

الأول: عند المنابع ويسمى القــوة المحركــة الكهربائيــة (EMF) Electromotive Force ويرمز لها بالرمز E وهي النسبة بين العمل الــلازم لاستجرار الشحنة الكهربائية من المولد و قيمة هذه الشحنة:

$$E = \frac{W_e}{q} \qquad (1,16)$$

الثاني: عند الأحمال ويسمى بالتوتر Voltage ويرمز له بــالرمز U وهو النسبة بين العمل اللازم لإدخال الشحنة الكهربائية إلى الحمل و قيمة هذه الشحنة.

$$U = \frac{W_L}{q} \qquad (1,17)$$

١-٢: العلاقات الأساسية في دارات التيار المستمر:

١-٢-١: المنابع الكهربائية Electrical source:

١-٢-١-١ منابع التوتر المستقلة Independent Voltage Source:

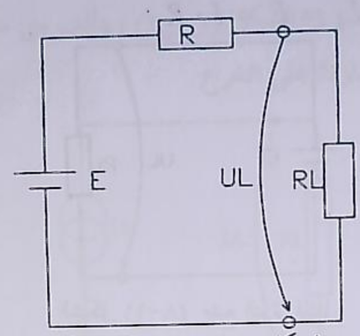
يمكن أن نميز نوعين من منابع التوتر المستقلة وهي:

منبع التوتر الحقيقي Real voltage Source ويتألف من منبع للقوة المحركة الكهربائية E مع مقاومة R موصلة على التسلسل [11] كما هو مبين على الشكل (١-٦)، فعند وصل هذا المنبع إلى حمل كهربائي **R_L** فــإن هــذا الأخير يستجر تياراً كهربائياً I وبالتالي:

$$U_L = E - I \cdot R \qquad (1,18)$$

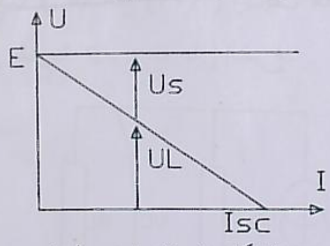
نلاحظ من هذه المعادلة أن زيادة التيار تؤدي إلى نقصان التوتر على طرفي الحمل و منه نستنتج أن منبع التوتر الحقيقي غير ثابت، ويكون توزيع التوتر الكهربائي بين المقاومة الداخلية للمنبع و المقاومة الخارجيــة (مقاومة الحمل) على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} E &= U_L + U_S \\ &= I \cdot R_L + I \cdot R \end{aligned} \qquad (1,19)$$



الشكل (١-٦) منبع التوتر الحقيقي

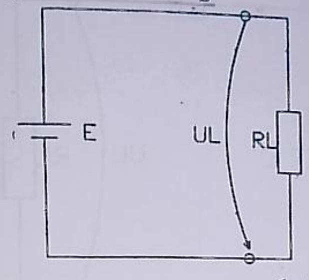
لذلك في المنابع الكهربائية يجب أن تكون قيمة المقاومة الداخلية R صغيرة جداً بالمقارنة مع مقاومة الحمل R_L بحيث يمكن إهمالها وعندها يكون التوتر على طرفي الحمل مساوياً بالقيمة E تقريباً، ونحصل بالتالي على النوع الثاني من المنابع المستقلة وهو ما يسمى :



الشكل (١-٧) توزيع التوتر

منبع التوتر المثالي Ideal voltage Source وهو يتألف فقط من منبع للقوة المحركة E [11] كما هو مبين على الشكل (١-٨) والتوتر على طرفي الحمل يبقى ثابتاً، ولا يتعلق بقيمة التيار المستجر.

$$U_L = E = I \cdot R_L \tag{1,20}$$

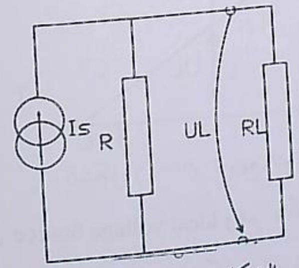


الشكل (١-٨) منبع التوتر المثالي

١-٢-١-٢ منابع التيار المستقلة Independent Current Source:

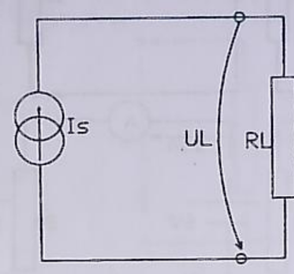
عملياً لا يوجد فرق بين منابع التوتر و منابع التيار، فعلى سبيل المثال المدخرة الكهربائية يمكن عدها منبعاً للتيار، إنما الفرق فقط في الدارة المكافئة لكل منهما ويمكن أيضاً أن نميز نوعين من منابع التيار المستقلة:

المنبع الحقيقي: كما في الشكل (١-٩) ويتألف هذا المنبع [1] من منبع ثابت للتيار I_s مع مقاومة R مربوطة على التفرع.



الشكل (١-٩) منبع التيار الحقيقي

المنبع المثالي: كما في الشكل (١-١٠) ويتألف من منبع ثابت للتيـــار I_s [1] دون أية مقاومة على التفرع



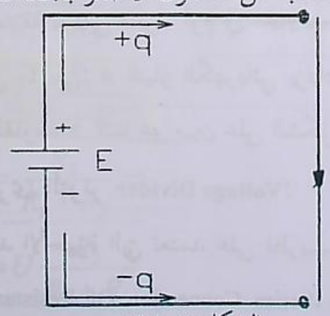
الشكل (١-١٠) منبع التيار المثالي

١-٢-٢: قانون أوم Ohm's Law:

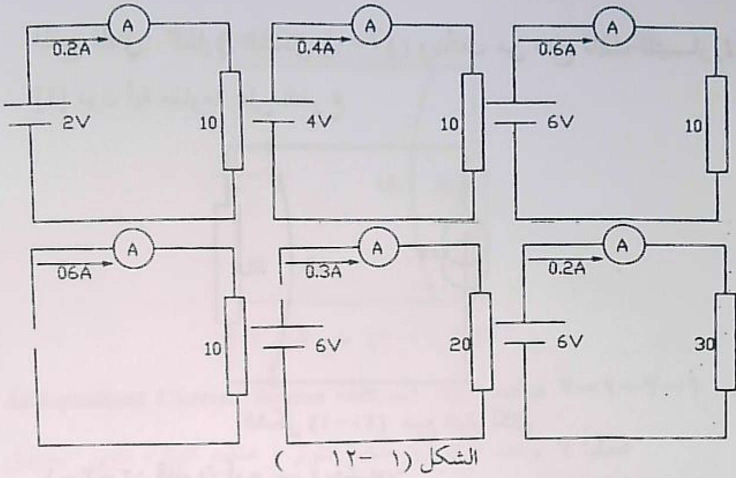
إذا ربطنا ناقلاً معدنياً مع منبع مولد للتيار المستمر ذي ق.م.ك فإن هذا المنبع سوف يولد فرقاً في الكمون على طرفي الناقل:

$$U_{ab} = V_a - V_b \qquad (1,21)$$

وبسبب هذا الفرق فإنه يتولد تيار كهربائي شدته **I** وذلك بسبب انتقـــال الشحنات الكهربائية السالبة من الكمون الأصغر باتجاه الكمون الأكبر.



الشكل(١-١١)



الشكل (١ -١٢)

إن النسبة بين التوتر المطبق على طرفي الناقل والتيار المار هي دائماً نسبة ثابتة و تتعلق فقط بطبيعة المادة المصنوع منها الناقل وبالتالي:

$$\frac{V_A - V_B}{I} = const = R \qquad (1,22)$$

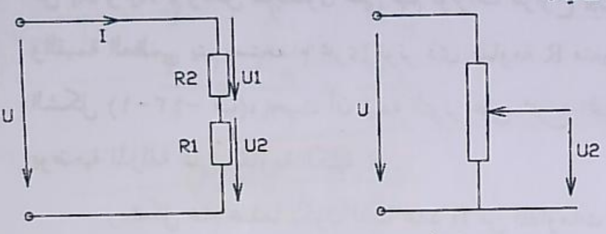
$$U_{AB} = I \cdot R \qquad (1,23)$$

وهذه العلاقة تسمى قانون أوم في الحالات المستقرة، [4] وينص هذا القانون على ما يلي: « التيار الكهربائي يزداد بزيادة التوتر المطبق وينقص بزيادة المقاومة » كما هو مبين على الشكل (١-١٢)

١-٢-٣: مجزئ التوتر Voltage Divider:

وهو أحد الأجهزة التي تعتمد على نظرية الجمع التسلسلي للمقاومات Series Connection Of Resistances، ويتألف من مقاومتين

موصلتين مع بعضهما على التسلسل [5] كما في الشكل (١-١٣-أ)حيث التوتر الكلي **U** سوف يجزأ إلى توتر **U_1** على المقاومة الأولى و **U_2** على المقاومة الثانية.



الشكل (١-١٣) مجزئ التوتر

وبالتالي حسب قانون أوم:

$$U_1 = I \cdot R_1$$
$$U_2 = I \cdot R_2 \qquad (1,24)$$

وحسب الجمع التسلسلي:

$$U = U_1 + U_2$$
$$= I.(R_1 + R_2) \qquad (1,25)$$

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

$$U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad (1,26)$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

$$U_2 = U\frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad (1,27)$$

هاتان العلاقتان تمثلان قاعدة مجزئ التوتر. إلا أننا باستخدام هذه العلاقات سوف نحصل على U_1 و U_2 بقيم ثابتة، وذلك حسب قيمة كل من R_1 و R_2 ، ولكن للحصول على قيم توترات تتراوح بين القيمة الدنيا والقيمة العظمى يتم استخدام مجزئ توتر ذي مقاومة R متغيرة كما في الشكل (١-١٣- ب)، حيث أن قيمة التوتر على مخرج المجزئ U_2 تتعلق بوضعية المنزلقة على المقاومة الكلية R .

وبشكل عام عندما يكون لدينا عدد n من المقاومات الموصلة على التسلسل فحسب قانون مجزئ التوتر يمكن أن نكتب:

$$U_n = U \cdot \frac{R_n}{R_{eq}} \qquad (1,28)$$

١-٢-٤: مجزئ التيار **Current Divider**:

وهو أيضاً أحد التطبيقات العملية لنظرية الجمع التفرعي للمقاومات Parallel Connection Of Resistances، ويتألف من مقاومتين موصلتين مع بعضهما [5] على التفرع كما في الشكل (١-١٤) حيث التيار الكلي سوف يتجزأ إلى I_1 في المقاومة R_1 و I_2 في المقاومة R_2، وحسب قانون أوم:

$$U = I_1 \cdot R_1 = I_1 \cdot \frac{1}{G_1} \qquad (1,29)$$

$$U = I_2 \cdot R_2 = I_2 \cdot \frac{1}{G_2} \qquad (1,30)$$

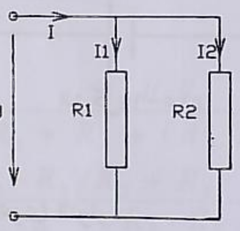
$$U = I \cdot R = I \cdot \frac{1}{G_{eq}} \qquad (1,31)$$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{R_{eq}}{R_1} = \frac{G_1}{G_{eq}} \qquad (1,32)$$

$$\frac{I_2}{I} = \frac{R_{eq}}{R_2} = \frac{G_2}{G_{eq}} \qquad (1,33)$$

$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad (1,34)$$

$$I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad (1,35)$$



الشكل (١-١٤) مجزئ التيار

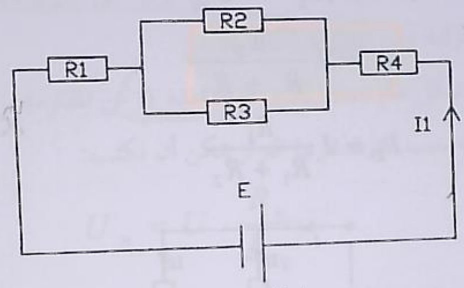
وبشكل عام إذا كان لدينا n مقاومة مربوطة على التفرع عندئذ يمكن أن نعمم هذه العلاقات بحيث نحصل على التيار المار في كل مقاومة من المقاومات وفق القانون التالي:

$$I_n = I\frac{R_n}{R_{eq}}$$

$$I_n = I \frac{G_{eq}}{G_n} \qquad (1,36)$$

مسألة (١-١): المطلوب حساب التيار المار في المقاومة R_2 في الـــدارة المبينة بالشكل (١-١٥) وذلك: ١- بمساعدة قاعدة مجزئ التوتر.

٢- بمساعدة قاعدة مجزئ التيار.

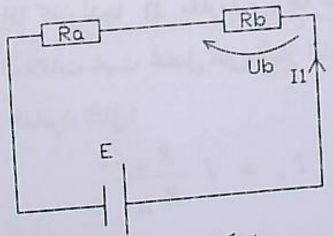


الشكل(١-١٥)

الحل:

١- بمساعدة قاعدة مجزئ التوتر:

نعيد رسم الدارة كما هو مبين بالشكل (١-١٦)



الشكل(١-١٦)

حيث:

$$R_a = R_2 // R_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 \cdot R_3}$$
$$R_b = R_1 + R_4$$
$$U_b = U_2$$

وبالتالي:

$$U_b = E \cdot \frac{R_b}{R_a + R_b}$$

وبما أن:

$$U_2 = I_2 . R_2$$
$$U_b = U_2$$

فإن:

$$I_2 \cdot R_2 = E \frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_4 + (R_2 // R_3)}$$

$$I_2 = \frac{E}{R_2} \cdot \frac{R_2 \cdot R_3 / R_2 + R_3}{R_1 + R_4 + \dfrac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}$$

$$I_2 = \frac{E \cdot R_3}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3}$$

٢-بمساعدة قاعدة مجزئ التيار:

من الشكل (١-١٦) وحسب قانون أوم:

$$E = I_1 . (R_a + R_b)$$

وبما أن التيار I_1 يتوزع إلى تيارين I_2 و I_4 فإن:

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$= \frac{E}{R_a + R_b} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$= \frac{E}{R_1 + R_4 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$= \frac{E \cdot R_3}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3}$$

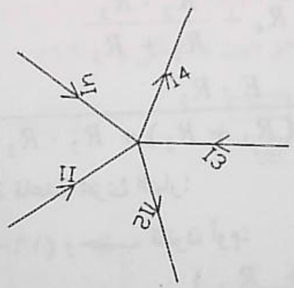
١-٢-٥: قوانين كيرشوف في دارات التيار المستمر

Kirchhoffs Law in D.C Circuits:

١-٢-٥-١: قانون كيرشوف الأول

:Kirchhoffs Current Law (KCL)

ينص قانون كيرشوف الأول على أن « المجموع الجبري للتيارات الكهربائية المتعلقة بعقدة معينة من دارة كهربائية يساوي الصفر » **[5]**.



الشكل(١-١٧) قانون كيرشوف الأول

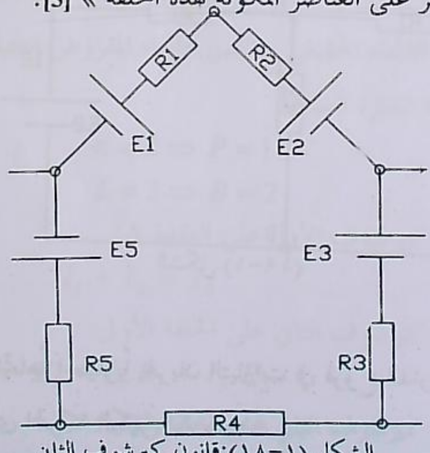
$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \quad (1,37)$$

وهنا يجب أن نميز بين التيارات الداخلة للعقدة، والتيارات الخارجة منها من حيث الإشارة، ولهذا سوف نفترض من الآن فصاعداً أن التيارات الداخلة للعقدة موجبة، والتيارات الخارجة سالبة، وبهذا يصبح نص القانون على الشكل التالي (إن مجموع التيارات الداخلة لعقدة ما يساوي مجموع التيارات الخارجة من تلك العقدة).

١-٢-٥-٢: قانون كيرشوف الثاني

: Kirchhoffs voltage Law (KVL)

ينص قانون كيرشوف الثاني على أن «المجموع الجبري للقوى المحركة الكهربائية في أية حلقة مغلقة من دارة كهربائية يساوي مجموع هبوطات التوتر على العناصر المكونة لهذه الحلقة » [5].



الشكل (١-١٨):قانون كيرشوف الثاني

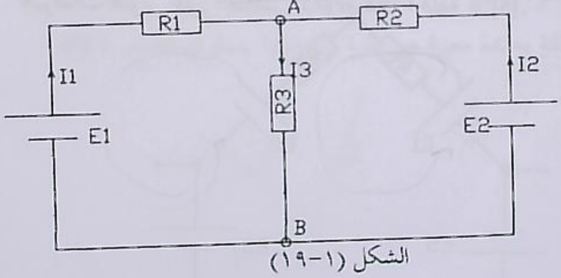
$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{k=1}^{m} I_k \cdot R_k \qquad (1,38)$$

حيث: n – عدد منابع القوى المحركة الكهربائية في الحلقة.

m – عدد العناصر غير الفعالة في الحلقة المدروسة .

في البداية يجب أن نختار اتجاها مرجعياً لهذه الحلقة، عندها تكون القوى المحركة الكهربائية كافة الموافقة بالاتجاه للاتجاه المرجعي المحدد ذات إشارة موجبة والمعاكسة ذات إشارة سالبة، وكذلك الأمر بالنسبة لهبوطات التوتر.

مسألة(١–٢): لدينا الدارة المبينة على الشكل (١–١٩) معلوم فيها قيمة E_1 و E_2 وقيم المقاومات R_1 و R_2 و R_3، و المطلوب حساب التيارات في فروع الدارة باستخدام قوانين كيرشوف **[10]**



الشكل (١–١٩)

الحل:

أ– نحدد اتجاهاً اختيارياً لجريان التيارات في فروع الدارة كافة، ويفضل اتجاه القوى المحركة الكهربائية نفسه.

ب- نحدد عدد العقد الرئيسية في الدارة n، ومنه يمكن أن نحدد عدد المعادلات المستقلة الناتجة عن قانون كيرشوف الأول وفق العلاقة:

$$P = n - 1 \qquad (1,39)$$

جـ- نحدد عدد الخطوط الرئيسية في الدارة L و منه يمكن أن نحدد عدد الحلقات المستقلة الناتجة عن قانون كيرشوف الثاني وفق العلاقة:

$$B = L - n + 1 \qquad (1,40)$$

ء- نطبق قانون كيرشوف الأول بمقدار P مرة و قانون كيرشوف الثاني بمقدار B مرة، وبذلك نحصل على جملة معادلات عددها B+P يساوي عدد المجاهيل L حيث:

$$P + B = n - 1 + L - n + 1 = L$$

$$P + B = L \qquad (1,41)$$

هـ- بعد حل المعادلات التي حصلنا عليها آنفاً نحدد قيم المجاهيل في جميع الخطوط. و في حال كون أحد التيارات ذا إشارة سالبة فإننا نقول: إن الاتجاه الحقيقي يعاكس الاتجاه المفروض اختيارياً.

بالنسبة للدارة السابقة

$$n = 2 \Rightarrow P = 1$$

$$L = 3 \Rightarrow B = 2$$

قانون كيرشوف الأول على العقدة A:

$$I_1 + I_2 = I_3 \qquad (1,42)$$

قانون كيرشوف الثاني على الحلقة الأولى:

$$E_1 = I_1.R_1 + I_3.R_3 \qquad (1,43)$$

قانون كيرشوف الثاني على الحلقة الثانية:

$$E_2 = I_2.R_2 + I_3.R_3 \qquad (1,44)$$

وبحل هذه المعادلات الثلاث:

$$E_1 = I_1.R_1 + (I_1 + I_2).R_3$$
$$E_2 = I_2.R_2 + (I_1 + I_2).R_3 \qquad (1,45)$$
$$E_1 = I_1.(R_1 + R_3) + I_2.R_3$$
$$E_2 = I_1.R_3 + I_2.(R_2 + R_3) \qquad (1,46)$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E_1 & R_3 \\ E_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \frac{E_1 \cdot (R_2 + R_3) - E_2 \cdot R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2} \qquad (1,47)$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & E_1 \\ R_3 & E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \frac{E_2 \cdot (R_1 + R_3) - E_1 \cdot R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2} \qquad (1,48)$$

ومنه:

$$I_3 = \frac{E_1 \cdot R_2 + E_2 \cdot R_1}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2} \qquad (1,49)$$

١-٢-٦: تحليل دارات التيار المستمر باستخدام تيارات الحلقات

Mesh Analysis

كما وجدنا سابقاً فإن تحليل أية دارة كهربائية باستخدام قوانين كيرشوف يحتاج لعدد من المعادلات مساو لعدد المجاهيل في الدارة،

وعندما تكون الدارة مؤلفة من عدد كبير من الفروع فإن عدد المجاهيل سوف يزداد بازدياد فروع الدارة، و بالتالي يزداد عدد المعادلات، و يصعب معه حلها للحصول على قيم المجاهيل، لذلك يمكن استخدام طرائق أخرى للحصول على قيم المجاهيل في الدارة وذلك بأقل عدد ممكن من المعادلات.

تسمى هذه الطريقة بتيارات الحلقات لأنها تستعمل تيارات وهمية معرفة في كل حلقة مستقلة، ويجري كل منها في جميع الفروع المشكلة لتلك الحلقة المدروسة.

تكون المجاهيل الجديدة في الدارات الكهربائية تيارات تجري في الحلقات المستقلة، وتسمى تيارات ماكسويل، و هذا يعني أن عدد معادلات النظام الجديد ينخفض من L معادلة في حالة النظام الأساسي الناتج عن قوانين كيرشوف إلى B معادلة و دائماً كما هو معلوم أن $B<L$.

لبيان كيفية تطبيق هذه الطريقة نفترض أنه لدينا الدارة التالية المبينة على الشكل (١-٢٠). نلاحظ في هذه الدارة أن $L = 3$ وبالتالي هناك ثلاثة مجاهيل، ويلزمنا لمعرفة هذه المجاهيل ثلاث معادلات ، ويمكن أن نحصل عليها من قوانين كيرشوف **[10]**

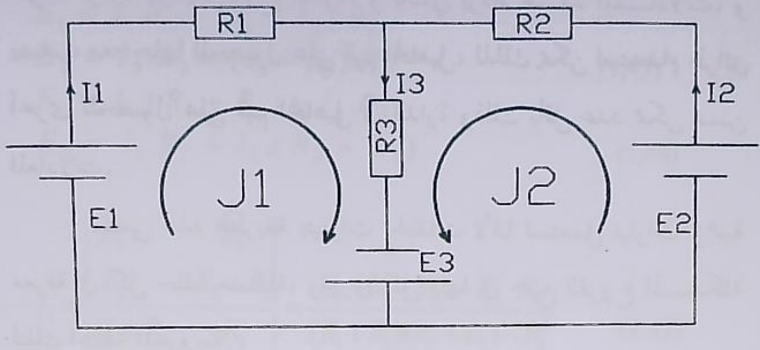
$$I_1 + I_2 = I_3 \qquad (1,50)$$

$$E_1 + E_3 = I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 \qquad (1,51)$$

$$E_2 + E_3 = I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 \qquad (1,52)$$

أما باستخدام تيارات الحلقات يلزمنا فقط B معادلة:

$$B = L - n + 1 = 2$$



الشكل(١-٢٠)

و نختار تياراً وهمياً يمر في الفروع كافة المكونة لكل حلقة مستقلة، و يكون J_1 في الحلقة الأولى و J_2 في الحلقة الثانية.

العلاقة بين التيارات الوهمية والتيارات الحقيقية:

$$\begin{aligned} I_1 &= J_1 \\ I_2 &= J_2 \\ I_3 &= J_1 + J_2 \end{aligned} \qquad (1,53)$$

بتعويض هذه التيارات في المعادلات الناتجة عن قوانين كيرشـــوف يكون:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= J_1 \cdot R_1 + (J_1 + J_2)R_3 \\ E_2 + E_3 &= J_1 \cdot R_3 + J_2(R_2 + R_3) \end{aligned} \qquad (1,54)$$

وبذلك نحصل على نظام معادلات جديد مجاهيله فقط J_1 , J_2 :

$$E_1 + E_2 = (R_1 + R_3)J_1 + R_3 \cdot J_2$$
$$E_2 + E_3 = R_3 \cdot J_1 + (R_2 + R_3)J_2 \qquad (1,55)$$

حيث:

R_1+R_3: مجموع المقاومات لجميع الفروع التي تكون الحلقة الأولى ويرمز لها بالرمز R_{11} وتسمى المقاومة الذاتية للحلقة الأولى .

R_2+R_3: مجموع المقاومات لجميع الفروع التي تكون الحلقة الثانية و يرمز لها بالرمز R_{22} وتسمى المقاومة الذاتية للحلقة الثانية .

R_3 : وهي المقاومة المشتركة بين الحلقة الأولى و الحلقة الثانية ويرمز لها بالرمز R_{12} و تسمى المقاومة التبادلية وتساوي R_{21} .

E_1+E_2: وهو المجموع الجبري لـ ق م ك كافة العاملة في الحلقة الأولى ويرمز لها بالرمز E_{11}

E_2+E_3 : وهو المجموع الجبري لـ ق م ك كافة العاملة في الحلقة الثانية ويرمز لها بالرمز E_{22} وبالتالي :

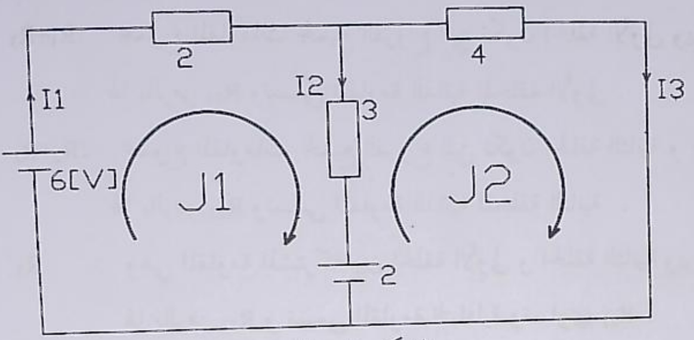
$$E_{11} = R_{11} \cdot J_1 + R_{12} \cdot J_2$$
$$E_{22} = R_{21} \cdot J_1 + R_{22} \cdot J_2 \qquad (1,56)$$

بالحل المشترك لهذه المعادلات نحصل على قيم J_1 و J_2 ومن ثم نقارن التيارات الحقيقية مع التيارات الوهمية، وفي حال كون أحد التيارات ذا إشارة سالبة فإن الاتجاه الحقيقي بعكس الاتجاه المفترض.

مسألة(١-٣): ليكن لدينا الدارة الكهربائية التالية [13] المبينة على الشكل (١-١٢) وفيها:

$$R_1 = 2[\Omega],\ R_2 = 3[\Omega],\ R_3 = 4[\Omega]$$
$$E_1 = 6[V],\ E_2 = 2[V]$$

و المطلوب: حساب التيارات في فروع الدارة باستخدام تيارات الحلقات.



الشكل (١-٢١)

الحل:

$$L = 3,\ N = 2$$
$$B = 3 - 2 + 1 = 2$$

توجد حلقتان مستقلتان و بالتالي نختار تيارين وهميين J_1 , J_2 :

$$E_{11} = R_{11} \cdot J_1 + R_{12} \cdot J_2$$
$$E_{22} = R_{21} \cdot J_1 + R_{22} \cdot J_2$$

$$R_{11} = 5[\Omega],\ R_{22} = 7[\Omega]$$
$$R_{12} = R_{21} = R_3 = 3[\Omega]$$
$$E_{11} = E_1 - E_2 = 4[V]$$
$$E_{22} = E_2 = 2[V]$$

وبالتعويض يكون:

$$4 = 5J_1 - 3J_2$$
$$2 = -3J_1 + 7J_2$$

$$J_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{34}{26} = 1.4[A]$$

$$J_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{22}{26} = 0.85[A]$$

بالمقارنة مع التيارات الحقيقية يكون:

$$I_1 = J_1 = 1,4[A]$$
$$I_2 = J_2 - J_1 = -0,55\ [A]$$
$$I_3 = J_2 = 0,85\ [A]$$

نلاحظ أن التيار I_2 ذو إشارة سالبة، و هذا يعني أن الاتجاه الحقيقي بعكس الاتجاه المفترض، وبالتالي فإن البطارية الثانية تستجر تياراً كهربائياً بدلاً من أن تعطي. أي تعمل كمستهلك و ليس كمولد.

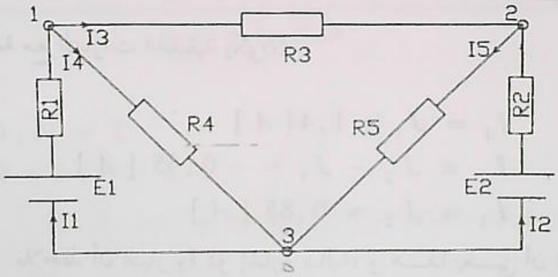
١-٢-٧: تحليل دارات التيار المستمر باستخدام فرق الكمون العقدي

Nodal Analysis:

تسمى هذه الطريقة طريقة كمونات العقد [12] لأنها تعتمد على حساب كمونات العقد المستقلة التي على أساسها يمكن أن نحدد فرق

الكمون بين أي عقدتين من الدارة، وبمعرفة هذا الفرق في الكمون يمكن أن نحدد قيمة التيار الذي يمر في الفرع المعتبر. و تعتمد هذه الطريقة على فكرة استبدال المجاهيل نفسها في النظام الأساسي الناتج من قوانين كيرشوف بمجاهيل جديدة هي كمونات العقد بحيث نحصل على نظام جديد عدد معادلاته أقل من المعادلات الأصلية، وهذا يعني أننا نحصل على نظام معادلات عددها P معادلة وهي دائماً أصغر من L عدد المجاهيل.

ولبيان كيفية استخدام هذه الطريقة نفترض أن لدينا الدارة المبينة على الشكل (١-٢٢).



الشكل (١-٢٢)

في البداية نحدد عدد المعادلات المستقلة في الدارة:

$$P = n - 1 = 2$$

إذاً توجد في هذه الدارة عقدتان رئيسيتان ١ و٢ و عقدة ٣ مختارة كعقدة أساس Reference Node وربطها إلى الأرض وكمونها يساوي الصفر $V_3 = 0$.

نحسب فرق الكمون بين العقد المستقلة و العقدة المرجعية:

$$V_1^{`} = V_1 - V_3 \qquad (1,57)$$
$$V_2^{`} = V_2 - V_3$$

نحسب فرق الكمون بين العقد المستقلة:

$$V_{12} = V_1^{`} - V_2^{`} \qquad (1,58)$$

نطبق قانون كيرشوف الأول على العقد المستقلة:

$$I_1 + I_3 - I_4 \qquad (1,59)$$
$$I_3 + I_5 - I_2$$

نطبق قانون أوم على فروع الدارة لنحصل على قيم التيارات

$$I_1 = G_1.E_1 + G_1.V_{31}$$
$$I_2 = G_2.E_2 + G_2.V_{32}$$
$$I_3 = G_3.V_{21} \qquad (1,60)$$
$$I_4 = G_4.V_1^{`}$$
$$I_5 = G_5.V_2^{`}$$

نعوض قيم هذه التيارات بمعادلات كيرشوف فنجد:

$$G_1.E_1 - G_1.V_1^{`} + G_3.V_2^{`} - G_3.V_1^{`} - G_4.V_1^{`} = 0$$
$$G_3.V_2^{`} - G_3.V_1^{`} + G_5.V_2^{`} - G_2.E_2 + G_2.V_2^{`} = 0 \qquad (1,61)$$

بترتيب هذه المعادلات نجد:

$$G_1.E_1 = (G_1 + G_3 + G_4).V_1^{`} - G_3.V_2^{`}$$
$$G_2.E_2 = -G_3.V_1^{`} + (G_2 + G_3 + G_5)V_2^{`} \qquad (1,62)$$

وبالتالي الشكل العام يمكن أن يكتب على الشكل التالي:

$$I_1' = G_{11}.V_1' + G_{12}.V_2'$$
$$I_2' = G_{21}.V_1' - G_{22}.V_2' \qquad (1,63)$$

حيث :

G_{11} – الناقلية الذاتية للعقدة المستقلة الأولى، وتساوي المجموع الجبري لناقليات الفروع كافة المتصلة معها .

G_{12} – الناقلية التبادلية بين العقدتين المستقلتين، و دائماً تؤخذ بإشارة سالبة و تساوي ناقلية الفروع الواصلة بينهما بشكل مباشر .

I_1', I_2' – تيارات المنابع المغذية للعقد المستقلة، وهي عبارة عن مجموع جداءات الناقليات و توترات المنابع المتعلقة بالعقدة المذكورة ، وتؤخذ جميع الجداءات بإشارة موجبة إذا كان اتجاه E نحو العقدة وبإشارة سالبة إذا كان اتجاه E خارجاً من العقدة .

مسألة(١ – ٤): لدينا الدارة التالية و تحوي:

$$R_1 = 5[\Omega], R_2 = 3[\Omega], R_3 = 2[\Omega]$$
$$R_4 = 5[\Omega], R_5 = 1[\Omega], R_6 = 0.5[\Omega]$$
$$E_5 = 11[V], E_6 = 36[V]$$

و المطلوب حساب التيارات المارة في فروع الدارة باستخدام طريقة فرق الكمون العقدي [1].

الحل:

$$L = 6 \;,\; N = 4$$
$$P = 3 \;,\; B = 3$$

يوجد ثلاث عقد مستقلة و عقدة رابعة كعقدة أساس وبالتالي:

$$\begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ I'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{24} \\ G_{41} & G_{42} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_4 \end{bmatrix}$$

$$G_{11} = G_1 + G_3 + G_6 = 2,7[S]$$

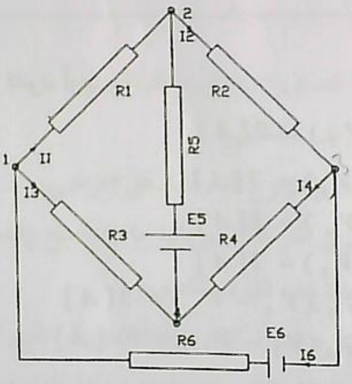
$$G_{22} = G_1 + G_2 + G_5 = 1,53\ [S]$$

$$G_{44} = G_3 + G_4 + G_5 = 1,7[S]$$

$$G_{12} = G_{21} = 0,2[S]$$

$$G_{14} = G_{41} = 0,5[S]$$

$$G_{24} = G_{42} = 1[S]$$



الشكل(١-٢٣)

تيارات المنابع:

$$I'_1 = G_6 . E_6 = 72\ [A]$$

$$I'_2 = G_5 . E_5 = 11\ [A]$$

$$I_4^` = -G_5.E_5 = -11\,[A]$$

وبالتالي:

$$\begin{bmatrix} 72 \\ 11 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7 & -0.2 & -0.5 \\ -0.2 & 1.53 & -1 \\ -0.2 & -1 & 1.7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1^` \\ V_2^` \\ V_4^` \end{bmatrix}$$

$$V_1^` = \frac{D_1}{D} = 31[V]$$

$$V_2^` = \frac{D_2}{D} = 21[V]$$

$$V_4^` = \frac{D_3}{D} = 15[V]$$

و حسب قانون أوم:

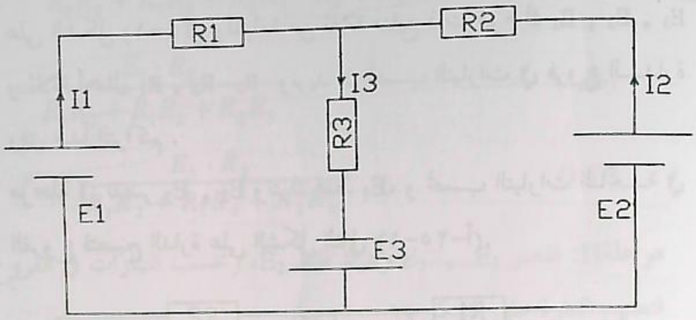
$$I_1 = G_1.(V_1^` - V_2^`) = 2[A]$$
$$I_2 = G_2.(V_2^` - V_3) = 7[A]$$
$$I_3 = G_3.(V_1^` - V_4^`) = 8[A]$$
$$I_4 = G_4.(V_4^` - V_3) = 3[A]$$
$$I_5 = G_5.E_5 + G_5.(V_4^` - V_2^`) = 5[A]$$
$$I_6 = G_6.E_6 + G_6(V_3 - V_1^`) = 10\,[A]$$

١-٢-٨: التحليل باستخدام مبدأ التراكم

Superposition Principle:

ينص مبدأ التراكم على ما يلي: إذا أثرت مجموعة مـن القـوى المحركة الكهربائية في دارة ما فإن التيارات التي ستولد في كل فرع مـن

فروع الدارة يمكن حسابها من تراكم التيارات التي تتولد في هذه الفـــروع فيما لو عملت في كل مرة ق م ك واحدة من مجموع القـــوى المحركـــة الكهربائية العاملة في الدارة.



الشكل(١-٢٤) مبدأ التراكم

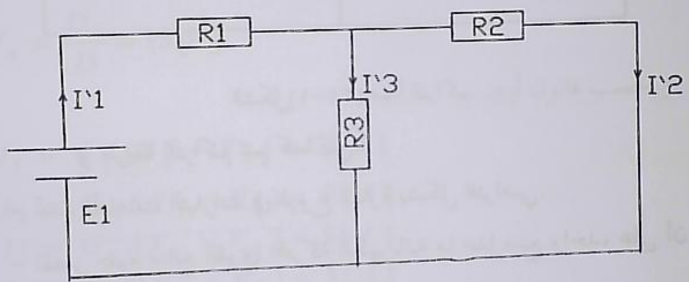
و طريقة التراكم تتم كما يلي:

- تحدد اتجاهات التيارات في فروع الدارة بشكل افتراضي.
- تقصر جميع منابع القوى المحركة الكهربائية ما عدا منبع واحد، على أن يبقى تأثير المقاومة الداخلية لهذه القوى المقصورة.
- تحسب التيارات في فروع الدارة كافة و الناتجة عن أثر المنبع المفروض.
- تكرر عملية القصر على أن يترك منبع واحد في كل مرة حتى تكـــون جميع الحالات قد استنفدت وفي كل مرة تحسب التيارات التي تتولـــد في الفروع.

- نراكم جميع التيارات الجزئية في كل فرع من الفروع لنحصل على التيار الكلي في الفرع المذكور.

ولبيان كيفية استخدام مبدأ التراكم **[4]** نفترض لدينا الدارة المبينة على الشكل (١-٢٤) والمؤلفة من ثلاثة منابع ذات ق م ك E_1 , E_2 , E_3 و ثلاثة أحمال R_1 , R_2 R_3 ونريد أن نحسب التيارات في فروع الدارة وفق مبدأ التراكم .

مرحلة I: نقصر E_3 , E_2 ونترك فقط E_1، و نحسب التيارات الناتجة في الفروع فتصبح الدارة على الشكل التالي (١-٢٥-أ).



الشكل(١-٢٥-أ) مرحلة أولى

$$R_{eq\,(I)} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \qquad (1,64)$$

$$I_1' = \frac{E_1}{R_{eq\,(I)}} = \frac{E_1(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (1,65)$$

وحسب قانون مجزئ التيار يكون:

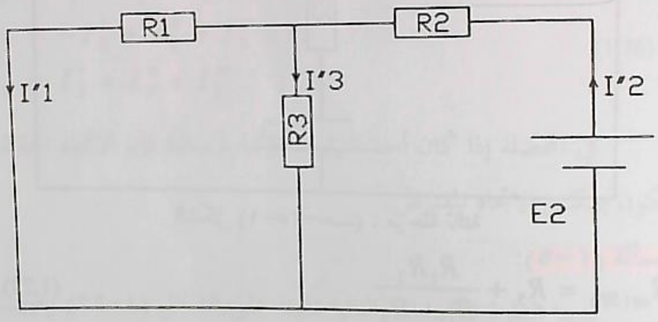
$$I_2' = I_1' \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$= \frac{E_1(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$= \frac{E_1 \cdot R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (1,66)$$

$$I_3' = \frac{E_1 \cdot R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (1,67)$$

مرحلةII: نقصر E_1 , E_3 ونترك فقط E_2، ونحسب التيارات في الفروع فتصبح الدارة على الشكل (١-٢٥-ب)



الشكل(١-٢٥-ب) مرحلة ثانية

$$R_{eq(II)} = R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} \qquad (1,68)$$

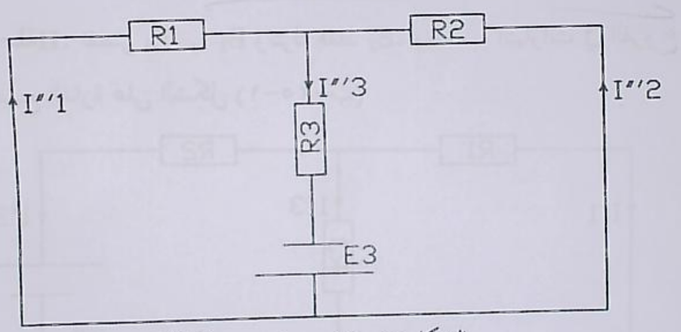
$$I_2'' = \frac{E_2}{R_{eq(II)}} = \frac{E_2(R_1 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (1,69)$$

حسب مجزئ التيار يكون:

$$I''_1 = \frac{E_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (1,70)$$

$$I''_3 = \frac{E_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (1,71)$$

مرحلة III: نقصر E_1 , E_2 ونترك فقط E_3، و نحسب التيارات الناتجة في الفروع فتصبح الدارة على الشكل (١-٢٥-حـ)



الشكل (١-٢٥-حـ) : مرحلة ثالثة

$$R_{eq(III)} = R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \qquad (1,72)$$

$$I'''_3 = \frac{E_3}{R_{eq(III)}} = \frac{E_3(R_1 + R_2)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (1,73)$$

وحسب قانون مجزئ التيار يكون:

$$I_1''' = \frac{E_3 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \qquad (1,74)$$

$$I_2''' = \frac{E_3 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \qquad (1,75)$$

مرحلةIV: مرحلة التراكم

لحساب التيارات الأصلية الناتجة عن تأثير ق م ك الثلاث نراكم هذه التيارات الجزئية مع الأخذ بالحسبان اتجاهات هذه التيارات (إذا كانت موافقة لاتجاه التيار الأصلي تكون إشارتها موجبة، و إذا كانت بعكس الاتجاه المفترض عندها تؤخذ بإشارة سالبة).

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1' - I_1'' + I_1''' \\ I_2 &= -I_2' + I_2'' + I_2''' \\ I_3 &= I_3' + I_3'' + I_3''' \end{aligned} \qquad (1,76)$$

في المحصلة إذا كان أحد التيارات بإشارة سالبة فإن الاتجاه الحقيقي يكون بعكس الاتجاه المفترض.

مسألة (١-٥):

لدينا الدارة الكهربائية التالية المبينة على الشكل (١-٢٦) وفيها مولد تيار مستقل $J = 4[A]$ و مولد توتر مستقل $E = 8[V]$ بالإضافة إلى الأحمال التالية:

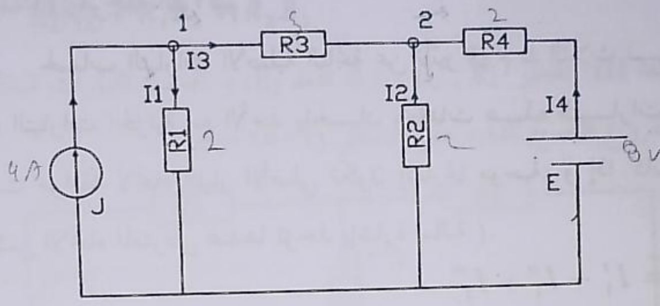
$R_1 = 2[\Omega], R_2 = 2[\Omega], R_3 = 5[\Omega], R_4 = 2[\Omega]$

و المطلوب حساب V_1 , V_2 حسب مبدأ التراكم [7] .

الحل:

مرحلة I:

بعد تحديد اتجاهات التيارات في الفروع نقصر E و نترك فقط مولد التيار J و تصبح الدارة على الشكل(١-٢٦- أ).



الشكل(١-٢٦)

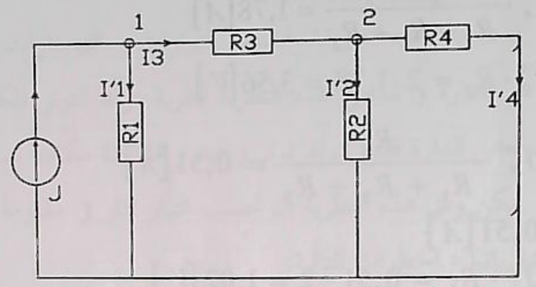
$$I_1' = J \cdot \frac{R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}}{R_1 + R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}}$$

$$I_1' = 4 \cdot \frac{5 + \frac{2 \cdot 2}{4}}{2 + 5 + \frac{2 \cdot 2}{4}} = 3\,[A]$$

$$V_1' = I_1' \cdot R_1 = 2 \cdot 3 = 6\,[V]$$

$$I_3' = J - I_1' = 4 - 3 = 1\,[A]$$

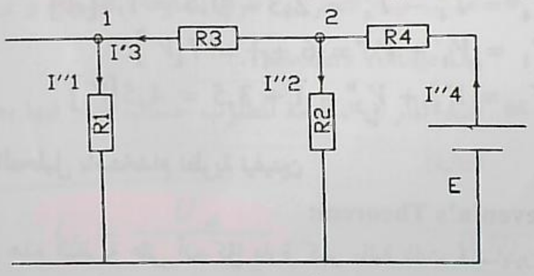
$$I'_4 = I'_3 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_4} = 1 \cdot \frac{2}{4} = 0,5[A]$$
$$I_2 = 0,5[A]$$
$$V'_2 = I'_2 \cdot R_2 = 2 \cdot 0.5 = 1[V]$$



الشكل(١-٢٦-أ) مرحلة أولى

مرحلة II:

نفتح مولد التيار J و نترك مولد التوتر المستقل E فتصبح الـــدارة على الشكل التالي [الشكل (١-٢٦-ب)]



الشكل(١-٢٦-ب) مرحلة ثانية

$$R_{eq(II)} = R_4 + \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_2 + R_1 + R_3} = 3,5[\Omega]$$

$$I_4'' = \frac{E}{R_{eq(II)}} = \frac{8}{3.5} = 2,3[A]$$

$$I_2'' = I_4'' \cdot \frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_3 + R_2} = 1,78[A]$$

$$V_2'' = I_2'' \cdot R_2 = 2 \cdot 1,78 = 3,56[V]$$

$$I_3'' = I_4'' \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_3 + R_2} = 0,51[A]$$

$$I_1'' = 0,51[A]$$

$$V_1'' = I_1'' \cdot R_1 = 0,51 \cdot 2 = 1,02[V]$$

مرحلة التراكم:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 3 + 0,5 = 3,5[A]$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 0,5 + 1,78 = 2,3[A]$$

$$I_3 = I_3' - I_3'' = 1 - 0,5 = 0,5[A]$$

$$I_4 = I_4'' - I_4' = 2,3 - 0,5 = 1,8[A]$$

$$V_1 = V_1' + V_1'' = 6 + 1 = 7[V]$$

$$V_2 = V_2' + V_2'' = 1 + 3,5 = 4,5[V]$$

١-٢-٩: التحليل باستخدام نظرية تيفينين

Thevenin's Theorem:

تنص هذه النظرية على أن كل دارة كهربائية ذات نهـــايتين، و تحتوي عدداً من المنابع الكهربائية، والمقاومات يمكن اســـتبدالها بـــدارة

تسلسلية بسيطة مؤلفة مقاومة وحيدة و منبع للتوتر. قيمة المقاومة تساوي مقاومة الدارة منظوراً إليها من بين نهايتيها، و ذلك بعد قصر جميع منابع التوتر والاستعاضة عنها بمقاومتها الداخلية و فتح منابع التيار ، أما قيمة منبع التوتر فتساوي التوتر بين نهايتي الدارة .

تستخدم هذه الطريقة لحساب التوترات و التيارات في أقسام مختلفة من الدارة و تسمى هذه النظرية نظرية مولد التوتر المكافئ لأنها تستعيض عن الدارة فقط بمولد توتر وحيد و مقاومة مكافئة تسلسلية **[9]**.

يمكن وفق هذه النظرية أن نحسب التيار المار في مقاومة من دارة كهربائية بإتباع الخطوات التالية:

- نفصل المقاومة المراد حساب التيار فيها.
- نحسب مقاومة الدارة منظوراً إليها من بين طرفي المقاومة المفصولة و ذلك بعد قصر جميع منابع ق م ك و فتح منابع التيار ويرمز لها بالرمز Thevenin's Resistance R_{th}.
- نحسب قيمة التوتر بين طرفي المقاومة المفصولة، و يرمز له بالرمز Thevenin's Voltage U_{th}.
- التيار المار في المقاومة المطلوب حساب التيار فيها يعطى بالعلاقة التالية:

$$I_L = \frac{U_{th}}{R_{th} + R_L} \qquad (1,77)$$

مسألة (١-٦):

لدينا الدارة الكهربائية المبينة على الشكل (١-٢٧) وفيها:

$$R_1 = 20[\Omega]\ , R_2 = 30[\Omega], R_3 = 40[\Omega]$$

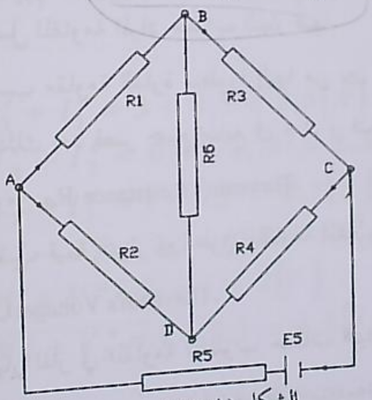
$$R_4 = 10[\Omega], R_5 = 0[\Omega]\ , R_6 = 50[\Omega]$$

$$E_5 = 10[V]$$

والمطلوب حساب التيار المار في المقاومة R_6 باستخدام نظرية Thevenin [14].

الحل:

$$I_6 = \frac{U_{th}}{R_{th} + R_6}$$



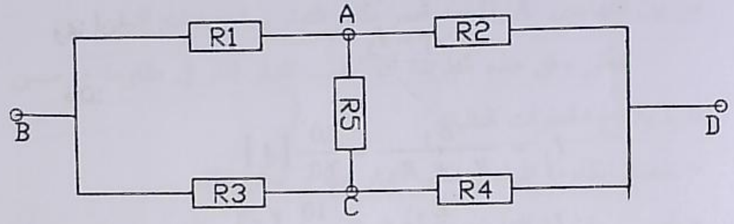
الشكل (١-٢٧)

نحسب R_{th}: نقصر جميع منابع التوتر في الدارة فتصبح على الشكل التالي:

$$R_a = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = 0\ [\Omega]$$

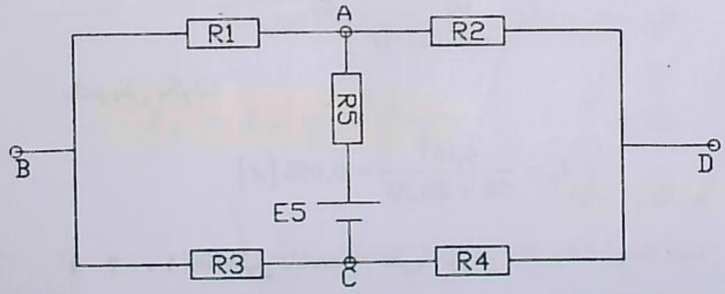
$$R_c = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = 0\ [\Omega]$$

$$R_D = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4 + R_5} = 7,5\ [\Omega]$$



الشكل (١-٢٧- أ)

وبالتالي: $R_{th} = R_D + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = 20,83\ [\Omega]$



الشكل (١-٢٧- ب)

نحسب U_{th}: لحساب التوتر U_{th} يجب أن نحسب:

$$E_5 = I_1.R_1 + I_3.R_3$$
$$E_5 = I_2.R_2 + I_4.R_4$$

وبما أن:

$$I_2 = I_4$$
$$I_1 = I_3$$

فإن:

$$I_1 = \frac{E_5}{R_1 + R_3} = \frac{10}{60}[A]$$

$$I_2 = \frac{E_5}{R_2 + R_4} = \frac{10}{40}[A]$$

وبالتالي:

$$U_{th} = I_1 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4$$
$$= \frac{10}{60} \cdot 40 - \frac{10}{40} \cdot 10$$
$$= 4,167 \; [V]$$

بالتعويض يكون:

$$I_6 = \frac{4,167}{50 + 20,83} = 0,058 \; [A]$$

١-٢-١٠: التحليل باستخدام نظرية نورتن

Norton's Theorem:

تنص هذه النظرية على أن أية شبكة كهربائية ذات نهايتين B , A و تحتوي على عدد من المنابع المستقلة والمقاومات يمكن استبدالها بشبكة بسيطة مؤلفة فقط من منبع تيار مثالي مع مقاومة على التفرع [9].

قيمة منبع التيار تساوي قيمة التيار المار في السلك الذي يقصر النهايتين B ,A ، أما قيمة المقاومة فتساوي مقاومة الشبكة منظوراً إليها من بين النهايتين B, A بعد قصر منابع التوتر و فتح منابع التيار.

يمكن وفق هذه الطريقة أن نحسب التيار المار في مقاومة ما من دارة بإتباع الخطوات التالية:

- نفصل المقاومة المراد حساب التيار فيها و لتكن R_L.
- نحسب مقاومة الدارة منظوراً إليها من بين طرفي المقاومة المفصولة وذلك بعد قصر منابع التوتر و فتح منابع التيار ويرمز لها بالرمز R_N وتسمى Norton's Resistance .
- نقصر نهايتي المقاومة المفصولة ونحسب التيار I_N Norton's Current.
- التيار المار في المقاومة R_L يعطى بالعلاقة التالية:

$$I_L = I_N \frac{R_N}{R_N + R_L} \qquad (1,78)$$

مسألة (١-٧):

لدينا الدارة الكهربائية المبينة على الشكل (١-٢٨) وفيها:

$$R_1 = 2[\Omega],\ R_2 = 1[\Omega],\ R_3 = 2[\Omega]$$

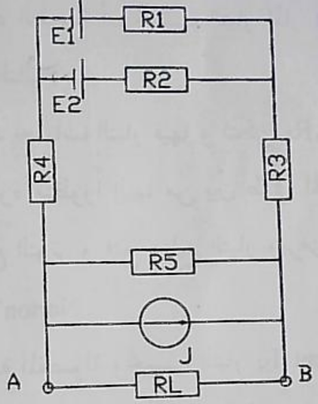
$$R_4 = 3[\Omega],\ R_5 = 6[\Omega],\ R_L = 2[\Omega]$$

$$E_1 = 12\,[V],\ E_2 = 6[V],\ J = 2[A]$$

والمطلوب حساب التيار في الحمل R_L حسب نظرية نورتن **[9]**.

الحل:

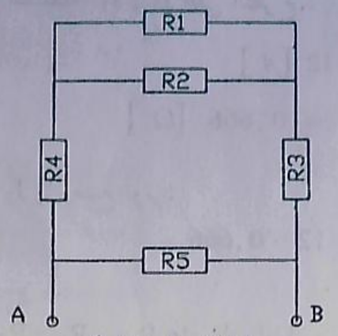
$$I_L = I_N \frac{R_N}{R_N + R_L}$$



الشكل (١-٢٨)

- **نحسب R_N**: نفصل R_L ونقصر منابع التوتر ونفتح منابع التيار فتصبح الدارة كما في الشكل(١-٢٨- أ):

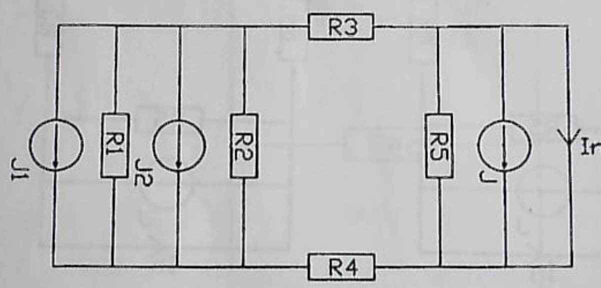
$$R_N = \frac{R_5\left[R_3 + R_4 + \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\right]}{R_5 + R_4 + R_3 + \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} = 2{,}91\,[\Omega]$$



الشكل (١-٢٨- أ)

نحسب التيار I_N:

نحول منابع التوتر المستقلة إلى منابع تيار مستقلة فتصبح الـــدارة كما في الشكل(١-٢٨- ب):



الشكل (١-٢٨- ب)

$$J_1 = \frac{E_1}{R_1} = 6[A]$$

$$J_2 = \frac{E_2}{R_2} = 6[A]$$

نجمع منابع التيار المستقلة J_1 , J_2 على التفرع :

$$J_3 = J_1 + J_2 = 12\ [A]$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0,666\ [\Omega]$$

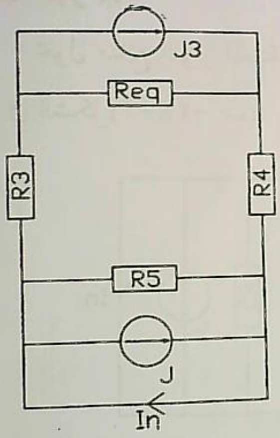
نحول منبع التيار J_3 إلى منبع توتر:

$$E_3 = J_3 \cdot R_{eq} = 12 \cdot 0,666$$

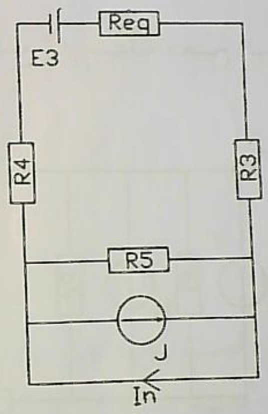
$$E_3 = 8\,[V]$$

نجمع المقاومات R_3 , R_4 , R_{ed} على التسلسل :

$$R = R_{ed} + R_3 + R_4 = 5,666\ [\Omega]$$



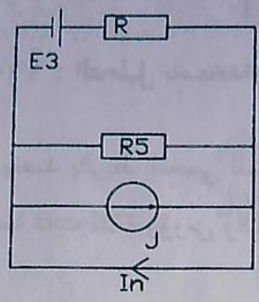
الشكل (١-٢٨-ﺣ)



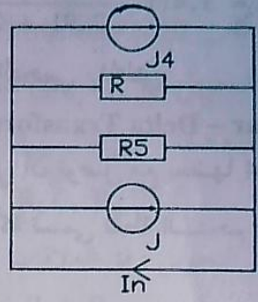
الشكل (١-٢٨-ء)

نحول منبع التوتر E_3 إلى منبع تيار:

$$J_4 = \frac{E_3}{R} = 1,411\ [A]$$



الشكل (١-٢٨- هـ)

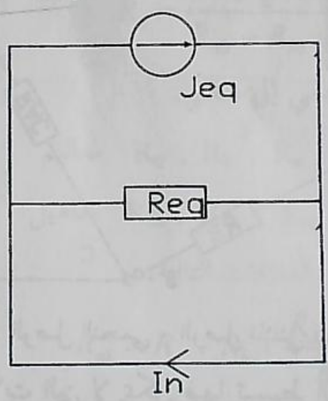


الشكل (١-٢٨- و)

نجمع منبعي التيار على التفرع:

$$J_{eq} = J_1 + J_2 = 3,411\,[A]$$

$$R_{eq} = \frac{R \cdot R_5}{R + R_5} = 2,91\,[\Omega]$$



الشكل (١-٢٨- ز)

وبالتالي:

$$I_N = I_{eq} = 3,411\,[A]$$

و بالتعويض في العلاقة الأساسية:

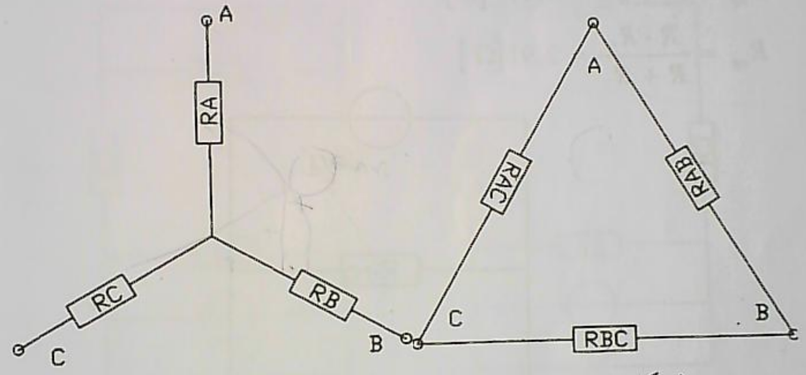
$$I_L = 3,411 \cdot \frac{2,91}{2,91 + 2} = 2[A]$$

١-٢-١١ : التحليل باستخدام التحويل النجمي والمثلثي

Star – Delta Transformation

يقصد بالربط النجمي للمقاومات هي أن توصل مع بعضها بحيث تكون نجمة ذات ثلاثة رؤوس والنقطة المشتركة تسمى نقطة النجم star point.

بينما الربط المثلثي فهو أن توصل المقاومات مع بعضها بحيث تكوّن أضلاع مثلث.



الشكل(١-٢٩): الوصل النجمي و الوصل المثلثي للمقاومات

هناك بعض الحالات التي لا يمكن فيها تبسيط الدارة الكهربائية وفق التوصيل التسلسلي أو التفرعي، حيث تكون الدارة مؤلفة من عدة فروع موصلة بشكل نجمي، أو عدة فروع موصلة بشكل مثلثي، في هذه

الحالة لا بد من تبسيط الدارة وفق تقانة التحويل النجمي إلى مثلثـــي أو بالعكس $\Delta \leftrightarrow Y$ *transforma tion* .

– التحويل من مثلثي إلى نجمي:

في هذه الحالة R_{ab} , R_{bc} , R_{ca} معاليم

R_a , R_b , R_c مجاهيل

ويتم التحويل وفق العلاقات التالية:

$\Delta \rightarrow Y$ *conversion*

$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ac}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ac}}$$

$$R_b = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (1,79)$$

$$R_c = \frac{R_{ac} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

– التحويل من نجمي إلى مثلثي:

في هذه الحالة R_a , R_b , R_c معاليم

R_{ab} , R_{bc} , R_{ca} مجاهيل

ويتم التحويل وفق العلاقات التالية:

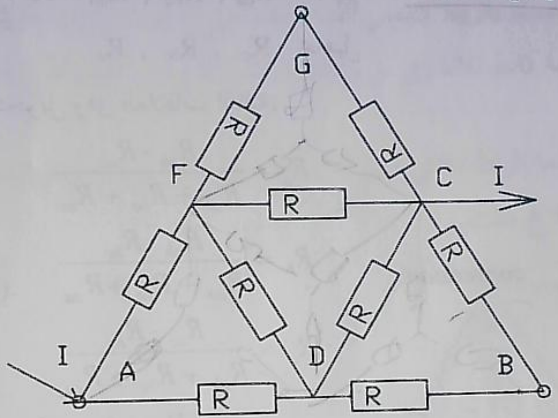
$Y \rightarrow \Delta$ *conversior*

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c}$$

$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a} \quad (1,80)$$

$$R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c \cdot R_a}{R_b}$$

مسألة (١-٨): لدينا الدارة الكهربائية المبينة على الشكل (١-٣٠) والمطلوب حساب التيار الداخل من النقطة A والخارج من النقطة B عند تطبيق توتر $U_{AC} = 100[V]$ مع العلم أن جميع المقاومات متساوية وتساوي $R = 6[\Omega]$



الشكل (١-٣٠)

الحل:

نبسط الدارة إلى الشكل التالي [الشكل (١-٣٠-أ)].

$$R_{FC} = \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} = 4[\Omega]$$

$$R_{CD} = \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} = 4[\Omega]$$

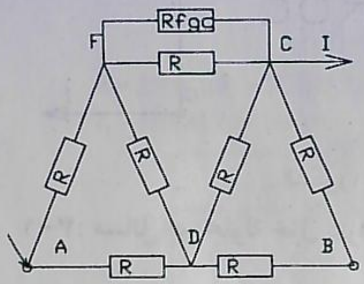
$$R_{FGC} = 2 \cdot R = 12\ [\Omega]$$

$$R_{CBD} = 2 \cdot R = 12\ [\Omega]$$

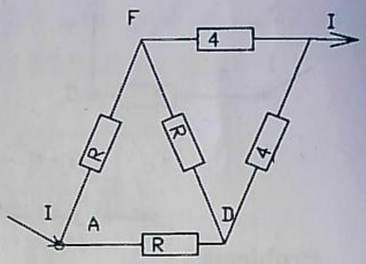
نحول المثلث AFD إلى نجمة فيكون:

$$R_A = \frac{R \cdot R}{R + R + R} = \frac{36}{18} = 2[\Omega]$$

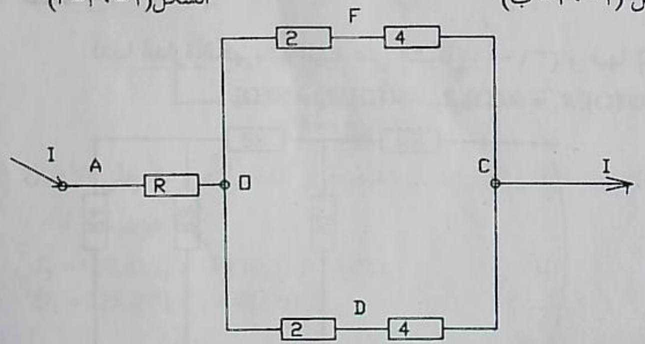
$$R_F = 2[\Omega], \; R_D = 2[\Omega]$$



الشكل(١-٣٠-أ)



الشكل (١-٣٠-ب)



الشكل (١-٣٠-حـ)

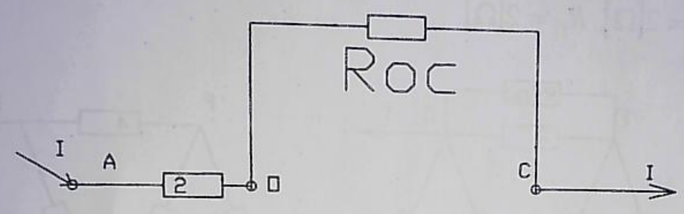
نجمع المقاومات على التسلسل ثم على التفرع فيكون:

$$R_{OC} = \frac{(2+4)(2+4)}{2+4+2+4} = 3[\Omega]$$

$$R_{AC} = 2 + 3 = 5[\Omega]$$

التيار الداخل من النقطة A و الخارج من النقطة C

$$I_{AC} = \frac{U_{AC}}{R_{AC}} = \frac{100}{5} = 20\ [A]$$



الشكل(١-٣٠-ء)

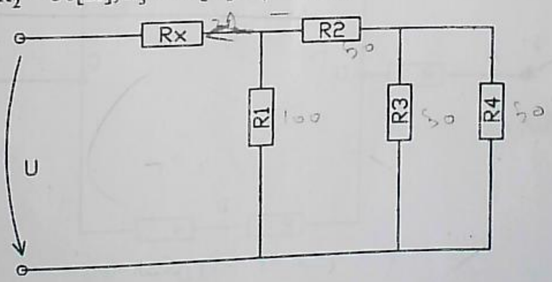
١-٣: مسائل غير محلولة حول دارات التيار المستمر

Problems

مسألة (١-٣-١):

لدينا الدارة الكهربائية المبينة على الشكل (١-٣١) و فيها **[6]**:

$R_1 = 100[\Omega], R_2 = 50[\Omega], R_3 = 50[\Omega], R_4 = 50[\Omega]$



الشكل (١-٣١)

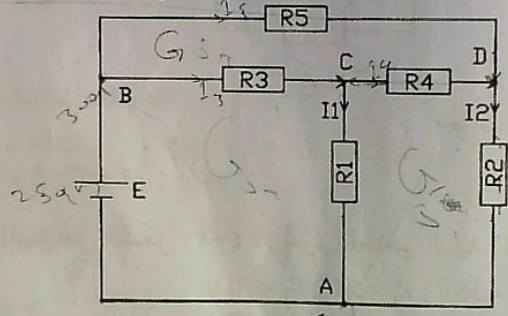
والمطلوب حساب قيمة R_X إذا كان التوتر المطبق علــى طــرفي الدارة U= 200 [V] والاستطاعة المستهلكة في الدارة P = 400[W]

الجواب: $R_X = 57,15$

مسألة (١-٣-٢):

دارة كهر بائية تحوي العناصر التالية **[10]**:

$E = 250[V], R_3 = 0.2[\Omega], R_4 = 0.2[\Omega], R_5 = 0.1[\Omega],$
$I_1 = 160[A], I_2 = 140[A]$



الشكل (١-٣٢)

المطلوب حساب التيارات في الخطوط و كذلك التوترات على الأحمال.

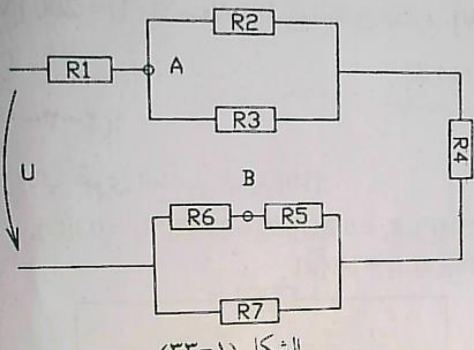
الجواب

$I_3 = 124[A], I_5 = 176[A], I_4 = 36[A],$
$U_1 = 225,2[V], U_2 = 237,4[V]$

مسألة (١-٣-٣):

في الدارة المبينة على الشكل (١-٣٣) المطلوب حساب التوتر مع العلم أن التوتر بين النقطتين B، A يساوي U_{AB}= 12,6 [V] و جميع قيم المقاومات معلومة :

$R_1 = 14[\Omega], R_2 = 20[\Omega], R_3 = 10[\Omega], R_4 = 5[\Omega]$
$R_5 = 15[\Omega], R_6 = 30[\Omega], R_7 = 12[\Omega]$



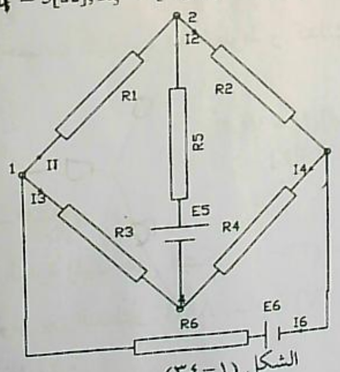
الشكل (١-٣٣)

الجواب: 30[V]

مسألة (١-٣-٤) :

الدارة المبينة على الشكل (١-٣٤) تحوي العناصر التالية **[1]** :

$E_5 = 11[V], E_6 = 36[V], R_1 = 5[\Omega], R_2 = 3[\Omega]$
$R_3 = 2[\Omega], R_4 = 5[\Omega], R_5 = 1[\Omega], R_6 = 0,5[\Omega]$



الشكل (١-٣٤)

و المطلوب:

١- حساب التيارات في مختلف فروع الدارة باستخدام قوانين كيرشوف.

٢- تأكد من صحة النتائج باستخدام طريقة تيارات الحلقات.

٣- تأكد أيضاً من صحة النتائج باستخدام طريقة التراكم.

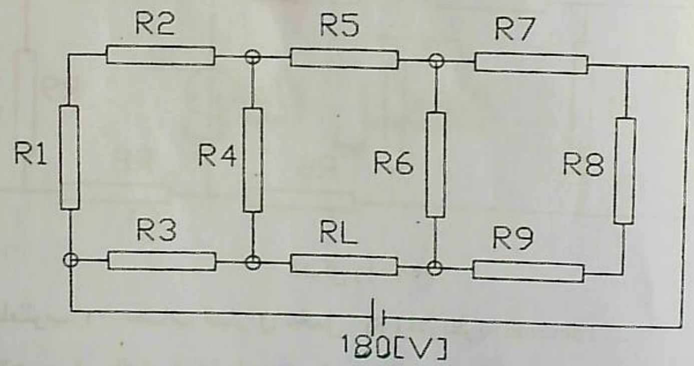
الجواب:

$$I_1 = 2[A], I_2 = 7[A], I_3 = 8[A]$$
$$I_4 = 3[A], I_5 = 5[A], I_6 = 10[A]$$

مسألة (١-٣-٥):

لدينا الدارة الموضحة على الشكل (١-٣٥) ذات المحددات التالية **[2]**:

$$R_1 = 8[\Omega], R_2 = 4[\Omega], R_3 = 12[\Omega], R_4 = 12[\Omega]$$
$$R_5 = 34[\Omega], R_6 = 30[\Omega], R_7 = 30[\Omega], R_8 = 17[\Omega]$$
$$R_9 = 13[\Omega], R_L = 10[\Omega], E = 180[V]$$



الشكل (١-٣٥)

والمطلوب:

١- حساب التيار في الحمل R_L باستخدام نظرية Thevenin.

٢- حساب التيار في الحمل R_L باستخدام نظرية Norton.

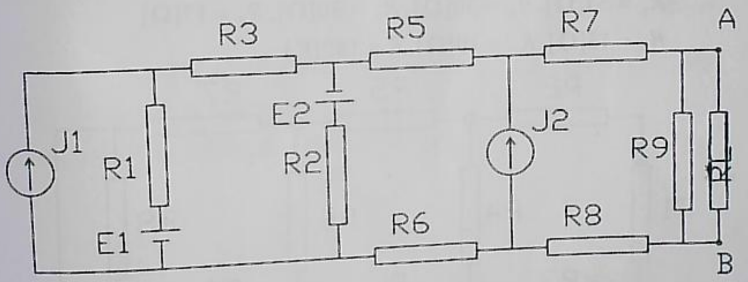
٣- تأكد من صحة النتائج باستخدام التحويل النجمي — المثلثي.

الجواب : $I_L=4$ [A]

مسألة (١-٣-٦):

لدينا الدارة المبينة على الشكل (١-٣٦) وفيها:

$$J_1 = 5[A], J_2 = 10[A] \quad E_1 = 10[V], E_2 = 30[V]$$
$$R_1 = 2[\Omega], R_2 = 5[\Omega], R_3 = 2[\Omega], R_4 = 1[\Omega]$$
$$R_5 = 1{,}5[\Omega], R_6 = 2{,}25[\Omega], R_7 = 6[\Omega]$$
$$R_8 = 6[\Omega], R_9 = 8[\Omega], R_L = 1[\Omega]$$



الشكل (١-٣٦)

المطلوب: ١- حساب التيار في الحمل R_L وفق نظرية Thevenin .

٢- حساب التيار في الحمل R_L وفق نظرية Norton .

الجواب : $I_L = 2{,}67$ [A]

الفصل الثاني

دارات التيار المتناوب أحادي الطور

Single Phase Alternating Current Circuits

٢-١ : تعريف التيار المتناوب:Alternating Current

التيار المتناوب هو التيار الذي تكون شدته واتجاهه متغيرين مع الزمن [4]. ويمكن أن نعبر عنه بعدة أشكال من الناحية البيانية كما هو مبين على الشكل (٢-١)، حيث نلاحظ في الشكل الأول نبضات مثلثية، وفي الشكل الثاني نبضات مربعة بينما في الشكل الثالث فهي نبضات جيبية.

تتميز هذه التيارات المتغيرة مع الزمن أنها تتكرر بعد انقضاء فترات زمنية تسمى الدور Period ،ويرمز لها بالرمز T، ويقاس هذا الدور بواحدة هي الثانية [sec].

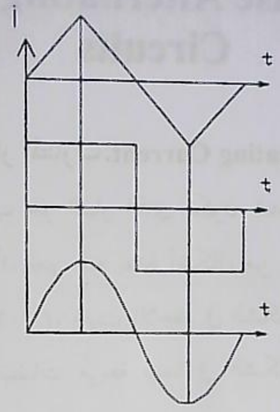
مقلوب هذا الدور هو التردد Frequency ويرمز له بالرمز f ويمثل عدد دورات تكرارية التي يقوم بها التابع خلال واحدة الزمن (الثانية).

$$f = \frac{1}{T} \qquad (2,1)$$

ويقاس الدور بواحدة هي الهرتز [HZ] .

إلا أنه غالباً ما يستخدم في الصناعة تيار متغير ذو تردد f=50[HZ]، ويسمى التردد الصناعي، دور هذا التردد T= 0.02[sec] وهو

تيار متغير له شكل جيبي ويسمى التيار المتناوب الجيبي Alternating Current.



الشكل(٢-١):المنحنيات الزمنية للتيارات المتناوبة

٢-٢:توليد التيار المتناوب الأحادي الطور:

Generation Of Single Phase Alternating Current

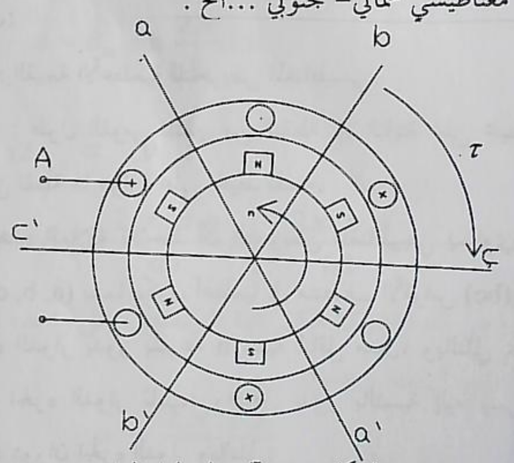
يتم توليد التيار المتناوب عن طريق تحويل القدرة الميكانيكية إلى قدرة كهربائية، وذلك بتطبيق ظاهرة التحريض الكهرطيسي في الآلات الكهربائية **[4]** التي تسمى المنوبات Synchronism Machine (المولدات التزامنية).

تتألف المنوبة من جزأين أساسيين:

١- الجزء الثابت Stator ويحتوي على عدد من النواقل الكهربائية

الموصل بعضها مع بعض على شكل وشائع كهربائية متوضعة ضمن مجارٍ محفورة في الجزء الثابت مشكلة أقطاباً مغناطيسية متعاقبة شمالي – جنوبي ....الخ .

٢- الجزء المتحرك Rotor الذي يسمى أحياناً الدوار وهو يدور حول محوره بسرعة (n دورة / دقيقة) . يتألف هذا الجزء من عدد من أزواج الأقطاب المغناطيسية المهيجة بالتيار المستمر بوساطة وشائع التهييج الملفوفة حول الأقطاب، تلف هذه الوشائع حول الأقطاب وتوصل مع بعضها على التسلسل بحيث يصبح هناك تتابع مغناطيسي شمالي- جنوبي ...الخ .



الشكل (٢-٢):آلية توليد التيار المتناوب

عند مرور التيار الكهربائي المستمر في وشائع التهييج، فإنه يتولد حقل مغناطيسي تتشابك خطوطه مع النواقل المتوضعة في الجزء الثابت،

أي أن الوشائع الموجودة في الجزء الثابت تقع تحت تأثير الحقل المغناطيسي المتولد عن الجزء الدوار.

نأخذ ثلاثة محاور aa`,bb`,cc` كما هو مبين على الشكل (٢-٢) عندها تسمى الأقواس ab, bc الخطوة القطبية ويرمز لها بالرمز τ .

نتيجة لتعاقب الأقطاب المغناطيسية الشمالية والجنوبية، فإن التحريض المغناطيسي الناتج في الثغرة الهوائية الفاصلة بين الجزأين الثابت والمتحرك يتغير بشكل جيبي حسب العلاقة التالية:

$$B = B_m . \sin \frac{\alpha}{\tau} \pi \qquad (2,1)$$

حيث:

B_m : القيمة الأعظمية للتحريض المغناطيسي.

α : طول القوس المتغير من النقطة A الثابتة على محيط الجزء الثابت وحتى نقطة ما دوارة على المحيط نفسه.

من هذه العلاقة نلاحظ أن التحريض المغناطيسي يساوي الصفر في النقاط (a, b, c) بينما يكون أعظمياً في منتصف الأقواس (ab),(bc) .

الجزء الدوار يدور بسرعة n نسبة لناقل معين، وبالتالي يمكن أن نفترض أن الجزء الدوار ثابت، والناقل يدور بالنسبة إليه بسرعة υ بعكس اتجاه دوران الجزء الدوار وبالتالي:

$$v = \frac{\pi.D.n}{60} = \frac{2P.\tau.n}{60} \qquad (2,3)$$

عند دوران الجزء الدوار بسرعة n فإن الحقل المغناطيسي الناتج ، والذي يتشابك مع وشائع الجزء الثابت، سوف يولد قوة محركة كهربائية (EMF) تعطى بالعلاقة التالية:

$$e = B.l.v \qquad (2,4)$$

حيث:

l :طول الناقل الذي يتوضع في مجال الحقل المغناطيسي

B : تحريض الحقل المغناطيسي في مكان توضع النواقل

v : السرعة المحيطية للنواقل بالنسبة للحقل المغناطيسي

وبالتعويض في العلاقة الأخيرة نجد:

$$e = B_m.\sin\frac{\alpha.\pi}{\tau}.l.v \qquad (2,5)$$

وبما أن

$$\alpha = v.t \qquad (2,6)$$

فإن:

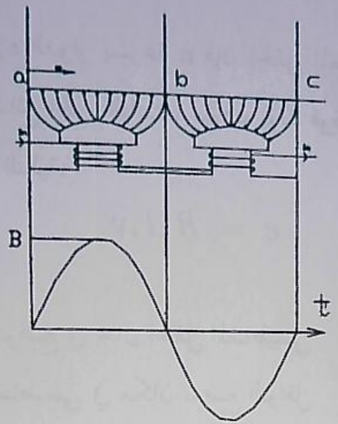
$$e = B_m.l.\frac{2.\pi.p.n}{60}.\sin\frac{2\pi.p.n}{60}.t \qquad (2,7)$$

وهي القوة المحركة الكهربائية المتولدة في ناقل واحد، وتمثل تابعـاً جيبياً لها سرعة زاوية (نبضية)

$$\omega = \frac{2.\pi.p.n}{60} \qquad (2,8)$$

وترددها

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{p.n}{60} \qquad (2,9)$$



الشكل(٢-٣) توزع التحريض المغناطيسي في الثغرة الهوائية

إذا وضع على محيط الثابت عدد من النواقل بحيث تكون المسافة بينها مساوية الخطوة القطبية، ووصلت هذه النواقل بعضها مع بعض على التسلسل فسوف نحصل على قوة محركة كهربائية على قطبي الآلة a,b تساوي مجموع القوى المحركة الكهربائية المتولدة في كل ناقل. وإذا افترضنا أن عدد النواقل N موزعة على عدد من الدارات قدره 2a فإن القوى المحركة الكهربائية المتولدة على طرفي الآلة تعطى بالعلاقة التالية:

$$E = \frac{N.e}{2a} = \frac{N}{2a}.B_m.l.\frac{2.p.\tau.n}{60}.\sin(\omega.t) \tag{2,10}$$

$$E = \frac{p}{a}.n^{`}.N.\phi_m.\sin(\omega.t)$$

$$E = E_m \sin(\omega.t) \tag{2,11}$$

حيث:

$$n^{`} = \frac{n}{60} \tag{2,12}$$

$$\phi_m = B_m.l.\tau = B_m.S \qquad (2,13)$$

$$E_m = \frac{p}{a}.n`.N.\phi_m \qquad (2,14)$$

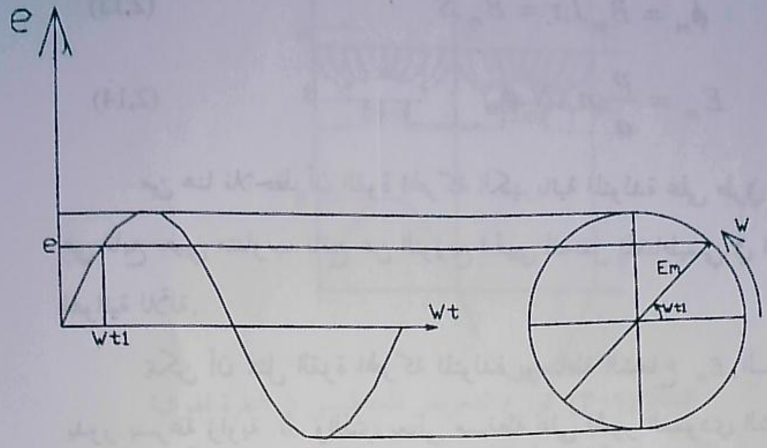
من هنا نلاحظ أن القوة المحركة الكهربائية المتولدة على طرفي الآلة هي تابع جيبي متناوب ناتج عن التوزيع الجيبي للحقل المغناطيسي في الثغرة الهوائية للآلة.

يمكن أن نمثل القوة المحركة المتولدة بوساطة الشعاع E_m الــذي يدور بسرعة زاوية ω والذي يعطي مسقطه على المحور العمودي الشعاع اللحظي للقوة المحركة الكهربائية.

تولد هذه القوة المحركة المتولدة في دارة مغلقة تحوي مقاومــة R تياراً كهربائياً جيبياً تحدد قيمته وفق قانون أوم كما يلي:

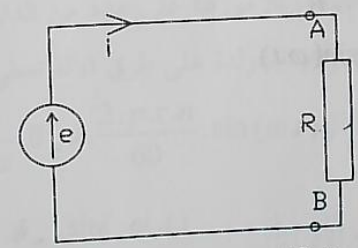
$$i = \frac{E}{R} = \frac{E_m}{R}.\sin(\omega.t) \qquad (2,15)$$

$$i = I_m.\sin(\omega.t) \qquad (2,16)$$



الشكل(٢-٤) التمثيل الزمني $e = f(\omega t)$

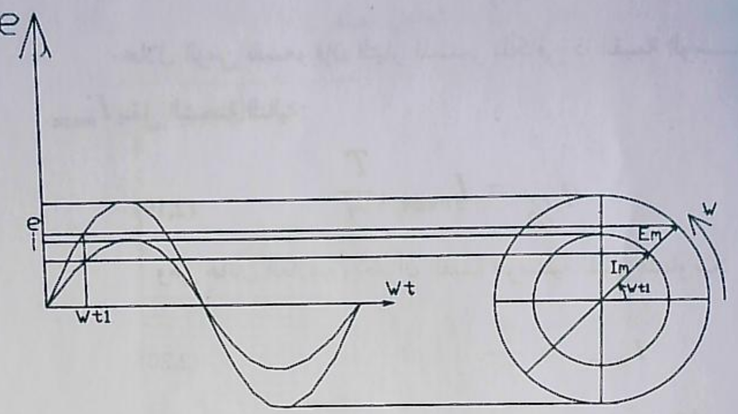
التمثيل الزمني للتيار هو أيضاً بشكل جيبي، وله قيمة عظمى وقيمة صغرى باللحظة نفسها التي تكون فيها القوة المحركة الكهربائية ذات قيمة عظمى وقيمة صغرى.



الشكل(٢-٥) دارة تحوي مقاومة R

الشعاعان E_m و I_m ينطبقان بعضهما على بعض في اللحظة الزمنية نفسها،وهذا يعني أنهما ينطبقان بالطور مع بعضهما في حالة دارة

تحوي فقط مقاومة أومية.



الشكل(٢-٦) التمثيل الزمني $e,i = f(\omega.t)$ لدارة تحوي مقاومة R

إن شدة التيار المتناوب تتغير من لحظة لأخرى، لذلك استخدام القيم اللحظية في الحسابات غير مريح، ولهذا السبب تم استخدام مفاهيم التيار المستمر المكافئ الذي يؤدي إلى النتائج نفسها كما هو الحال في التيار المتناوب، ومن هذه المفاهيم:

٢-٢-١ :مفهوم القيمة الوسطية للتيار المتناوب Root mean Square :

وهي قيمة التيار المستمر المكافئ الذي يولد القدرة الكهربائية نفسها التي يولدها التيار المتناوب خلال نصف الدور **[5]**.

الشحنة الكهربائية التي ينقلها التيار خلال الزمن dt هي:

$$dq = i.dt \qquad (2,17)$$

وخلال نصف الدور

$$q_{t/2} = \int_0^{t/2} i.dt \qquad (2,18)$$

خلال الزمن نفسه، فإن التيار المستمر المكافئ ذا القيمة الوسـطية I_{mean} ينقل الشحنة التالية:

$$q_{t/2} = I_{mean} \cdot \frac{T}{2} \qquad (2,19)$$

ومن هاتين العلاقتين نجد أن القيمة الوسطية للتيار المتناوب:

$$I_{mean} = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{t/2} i.dt \qquad (2,20)$$

وعند الاستعاضة عن التيار بقيمته اللحظية في العلاقة الأخيرة نحصل على القيمة الوسطية للتيار المتناوب:

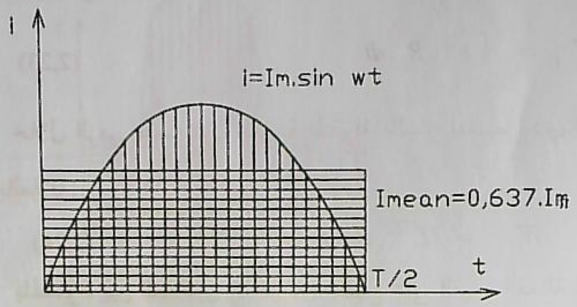
$$I_{mean} = \frac{2}{T} \int_0^{t/2} I_m . \sin(\omega t).dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \cong 0.637.I_m \qquad (2,21)$$

نلاحظ من التمثيل البياني المبين على الشكل (٢-٧) أن المـساحة المحصورة تحت المنحني الزمني للتيار خلال نصف الدور تساوي المـساحة المستطيلة التي ارتفاعها I_{mean} . ومن الجدير بالذكر أنه في النصف الثاني لموجة التيار فإن المساحة تكون سالبة، وهذا يعني أن الشحنة الكهربائيـة ذات إشارة سالبة، أي أنها منقولة بوساطة التيار بالاتجاه المعاكس.

وفي النتيجة النهائية فإن الشحنة المنقولة في اتجاه محدد خلال كامل

الدور ذات قيمة مساوية الصفر، وبذلك فإن القيمة الوسطية للتيار المتناوب خلال كامل الدور تساوي الصفر.



الشكل(٢-٦) القيمة الوسطية للتيار

عملياً فإن القيمة الوسطية للتيار المتناوب تكون ذات معنى فقط في حالة التيارات المقومة Rectified التي يكون لها اتجاه واحد في نصفي الموجة.

كمثال على ذلك هي حالة استخدام التقويم Rectification في عمليات الغلفنة أو في عملية شحن المدخرات.

٢-٢-٢ : القيمة المنتجة للتيار المتناوب:Active Value AC

وهي قيمة التيار المستمر المكافئ للتيار المتناوب الذي ينقل القدرة الكهربائية نفسها خلال كامل الدور T **[5]**.

عند مرور التيار المتناوب في حمل مقاومته R ،فإن القدرة

$I_{max} = I \times \sqrt{2}$

الكهربائية Electrical Energy التي تتحول إلى قدرة حرارية وخلال الزمن dt تعطى بالعلاقة التالية:

$$dW = i^2 .R .dt \qquad (2,22)$$

وخلال كامل الدور T

$$W_t = \int_0^T i^2 .R .dt \qquad (2,23)$$

خلال الزمن نفسه فإن القدرة المنقولة بالتيار المستمر ذي القيمة I تعطى بالعلاقة:

$$W_t = I^2 .R .T \qquad (2,24)$$

بالمساواة بين العلاقتين الأخيرتين نحصل على القيمة الفعالة للتيار:

$$I^2 .R .T = \int_0^T i^2 .R .dt \qquad (2,25)$$

وبالتعويض عن قيمة التيار بقيمته اللحظية نحصل على الشكل التالي:

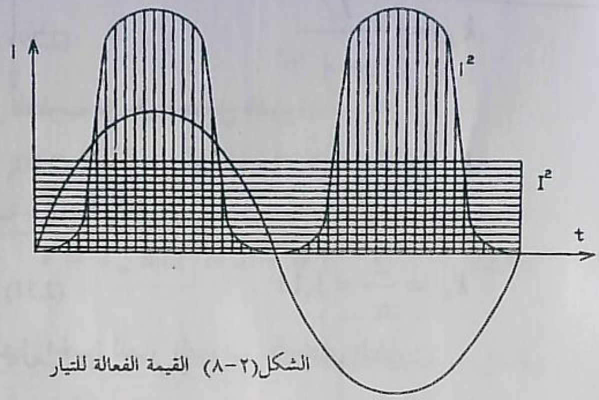
$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2(\omega .t).dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad (2,26)$$

من الجدير ذكره أنه في حالة الحمل الأومي البحت Pure Resistive Load فإن القدرة الكهربائية تنتقل دائماً من المنبع إلى الحمل ولا تتعلق باتجاه التيار، وكذلك لا تتعلق بإشارة القيمة اللحظية للتيار I وذلك لأن مربع القيمة اللحظية للتيار i^2 دائماً موجبة، وبالتالي فإن القدرة المنقولة ذات إشارة موجبة في نصفي الموجة كما هو مبين على الشكل (٢-٨).

من الشكل نلاحظ أن المساحة الواقعة تحت المنحني i^2 تتناسب

مع القدرة المنقولة بالتيار المتناوب، وهي تساوي المساحة المحصورة في المستطيل الذي ارتفاعه I^2 (مربع القيمة الفعالة للتيار المتناوب) .

وبشكل مماثل يمكن أن نحصل على العلاقة التي تعطي القيمة المنتجة للتوتر



الشكل(٢-٨) القيمة الفعالة للتيار

والقيمة المنتجة لل ق. م. ك. EMF .

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \qquad (2,27)$$

يمكن التعبير عن العلاقات المتبادلة بين القيمة المنتجة I والقيمة الوسطية I_{mean} والقيمة العظمى I_m بوساطة الثوابت التالية:

- **عامل الذروة**:وهو النسبة بين القيمة العظمى إلى القيمة الفعالة ويرمز له بالرمز k_s .

$$k_s = \frac{I_m}{I} \qquad (2,28)$$

- **عامل الشكل**:وهو النسبة بين القيمة الفعالة إلى القيمة الوسطية ويرمز له بالرمز k_k .

$$k_k = \frac{I}{I_{mean}} \qquad (2,29)$$

بالنسبة للتيار المتناوب فإن قيمة عامل الذروة:

$$k_s = \sqrt{2} = 1,41 \qquad (2,30)$$

وقيمة عامل الشكل :

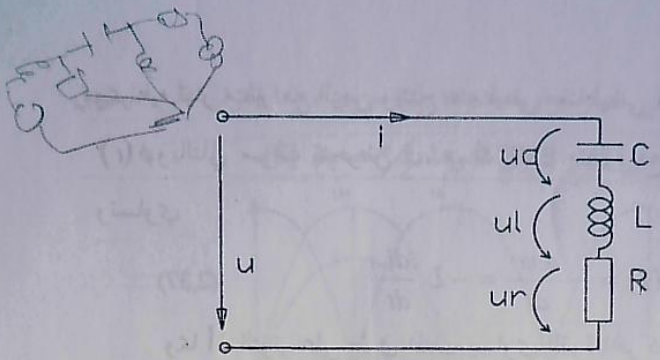
$$k_k = \frac{2}{\pi} = 1,11 \qquad (2,31)$$

٢-٣: التمثيل الجيبي للتيار المتناوب الأحادي الطور:

تتألف الدارة الكهربائية من عناصر لا تعرف بكميات ثابتة، بل تتغير قيمتها مع تغير التيار الذي يمر خلالها، إلا أن هذا التغير في الحالات العادية يكون صغيراً جداً ويمكن إهماله، وبالتالي يمكن القبول بأن عناصر الدارات هذه هي كميات ثابتة ومستقلة عن التيار وفي هذه الحالة تسمى الدارة عندئذ الدارة الكهربائية الخطية Linear Circuit، بينما في الحالة التي لا يمكن إهمال هذا التغيير عندها تسمى الدارة غير الخطية Non-linear Circuit.

إذا أخذنا دارة كهربائية تحوي عناصر مثالية خطية C, L, R موصلة بشكل تسلسلي ومطبق على طرفي هذه الدارة توتر متناوب جيبي **[10]**

$$u = U_m.\sin(\omega.t + \varphi) \qquad (2,32)$$



الشكل (٢-٩): دارة تسلسلية ذات C,L,R

فإنه سوف يمر تيار كهربائي في هذه الدارة:

$$i = I_m \sin(\omega.t + \varphi) \qquad (2,33)$$

وبالتالي سوف تحصل هبوطات في التوتر على أقطاب كل عنصر من العناصر المكونة لهذه الدارة.

وفقاً لقانون كيرشوف:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_c(t) \qquad (2,34)$$

بفرض أن المقاومة الكلية للدارة متمركزة في R فإن التـــوتر على طرفيها $u_R(t)$ وفقاً لقانون أوم:

$$u_R(t) = R.i(t) \qquad (2,35)$$

وبفرض أن السعة الكلية للدارة متمركزة في المكثف C، ولأن الشحنة التي تظهر على لبوسيه هي q فإن التوتر $u_C(t)$ يساوي

$$u_C(t) = \frac{q}{c} = \frac{1}{c}.\int_0^t i(t)dt \qquad (2,36)$$

كذلك الأمر وبفرض أن المحارضة الكلية للدارة تتركز في الملف L

ويمر فيه تيار متغير مع الزمن وينتج عنه فيض مغناطيسي متغير مع الــزمن $\phi(t)$ وبالتالي سوف تتحرض ق. م. ك EMF متغيرة مع الــزمن $e(t)$ وتساوي

$$e(t) = -\frac{d\psi}{dt} = -L.\frac{di}{dt} \qquad (2,37)$$

وبما أن التوتر على طرفي الملف يساوي القوة المحركــة الكهربائيــة المتحرضة ويعاكسها بالإشارة

$$u_L(t) = L.\frac{di}{dt} \qquad (2,38)$$

وبالتعويض في العلاقة الأساسية (2,34) نجد

$$u(t) = R.i(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int_0^t i.dt \qquad (2,39)$$

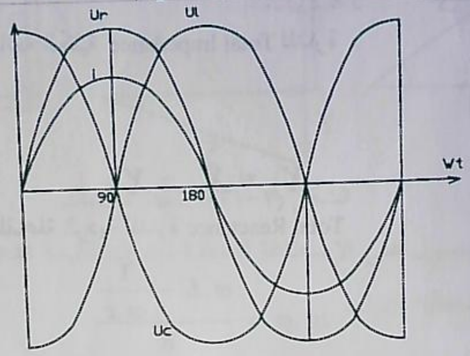
هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية وتسمى معادلة تشغيل الــدارة وبالتعويض عن التيار المار يكون:

$$u(t) = R.I_m.Sin(\omega.t) + \omega.L.I_m.\cos(\omega.t) - \frac{1}{\omega.c}.I_m\cos(\omega.t)$$

$$= R.I_m.Sin(\omega.t) + \omega.L.I_m.\sin\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega.c}.I_m.\sin\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (2,40)$$

- نلاحظ من هذه العلاقة أن التوتر u_R على طرفي المقاومة يتفق مــع التيار بالطور أي أن زاوية فرق الصفحة $\varphi_R = 0$ ، بينما التوتر على طرفي

الملف يتقدم على التيار بزاوية قدرها $\varphi_L = \pi/2$ ، إنما التوتر على طرفي المكثف يتأخر على التيار بزاوية قدرها $\varphi_C = \pi/2$ [5].



الشكل (٢-١٠): منحنيات التوتر والتيار لدارة C, L, R تسلسلية

$$U_m.\sin(\omega t+\varphi)=I_m.R.\sin(\omega t)+I_m\left(\omega.L-\frac{1}{\omega.c}\right)\cos(\omega t)$$

$$U_m.\sin\omega t.\cos\varphi+U_m.\cos\omega t.\sin\varphi=I_m.R.\sin\omega t+I_m\left(\omega.L-\frac{1}{\omega.c}\right)\cos\omega t$$

(2,41)

وبالمقارنة بين طرفي العلاقة نجد أن:

$$U_m.\cos\varphi.=I_m.R$$

$$U_m\sin\varphi=I_m.\left(\omega.L-\frac{1}{\omega.c}\right) \qquad (2,42)$$

ومنه:

$$U_m^2=I_m^2\left[R^2+(\omega.L-1/\omega.C)^2\right]$$

$$U_m=I_m.\sqrt{R^2+(\omega.L-1/\omega.c)^2} \qquad (2,43)$$

$$U=I.\sqrt{R^2+(\omega.L-1/\omega.c)^2}$$

$$U = I.\sqrt{R^2 + (X_L - X_c)^2} \qquad (2,44)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad (2,45)$$

وتسمى الممانعة الكلية Total Impedance للدارة .

حيث:

$$X = X_L - X_C \qquad (2,46)$$

وتسمى المفاعلة الردية للدارة Total Reactance

$$tg.\varphi = \frac{\omega.L - \frac{1}{\omega.c}}{R} \qquad (2,47)$$

وتسمى زاوية فرق الصفحة Phase Shift بين التيار والتوتر.

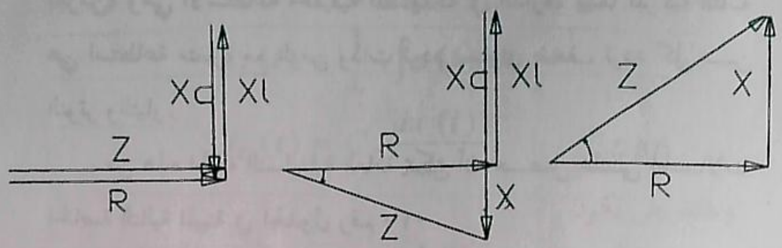
يمكن أن نميز ثلاث حالات للممانعة الكلية:

أ- $X_L > X_C$ عندئذ $X > 0$ وبالتالي الدارة ذات طبيعة تحريضية أي أن التيار يتأخر عن التوتر بزاوية قدرها φ (lagging).

ب- $X_C > X_L$ عندئذ $X < 0$ وبالتالي الدارة ذات طبيعة سعوية أي أن التيار يتقدم على التوتر بزاوية قدرها φ (leading).

ج- عندما $X_L = X_C$ عندئذ $X = 0$ وبالتالي الدارة ذات طبيعة أومية، أي أن التيار يتفق مع التوتر بالصفحة، و الزاوية بينهما مساوية الصفر $\varphi = 0$.

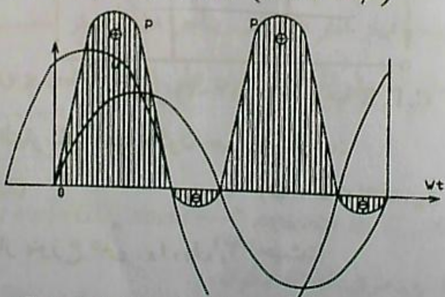
وبالتالي من معرفة X_L, X_C, R يمكن أن نرسم ما يسمى مثلث الممانعات Impedance Triangle **[6]**



الشكل (٢-١١) مثلث الممانعات

للحصول على الاستطاعة اللحظية نضرب القيمة اللحظية للتيار بالقيمة اللحظية للتوتر:

$$
\begin{aligned}
p &= u.i \\
&= U_m.\sin(\omega.t+\varphi).I_m \sin(\omega.t) \\
&= U_m.I_m.\sin(\omega.t+\varphi).\sin(\omega.t) \\
&= \frac{U_m I_m}{2}.[\cos\varphi - \cos(2.\omega.t+\varphi)] \\
&= U.I.\cos\varphi - U.I.\cos(2.\omega.t+\varphi)
\end{aligned}
\qquad (2,48)
$$



الشكل (٢-١٢) منحنيات التوتر والاستطاعة لدارة C, L, R تسلسلية

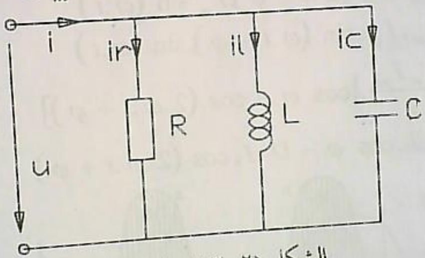
نلاحظ أن الاستطاعة تتألف من مركبتين: الأولى ثابتة ولا تتعلـــق

بالزمن، وهي الاستطاعة الحقيقية المستهلكة في الدارة، بينما المركبة الثانية هي استطاعة متغيرة مع الزمن وذات تردد يساوي ضعف تردد كل من التوتر والتيار.

من هذه الحالة التسلسلية العامة يمكن أن نحصل على الحالات الخاصة التالية المبينة في الجدول رقم -١-

أما في حالة دارة تحوي C, L, R على التفرع ومطبق عليها توتر جيبي ومتناوب **[10]**

$$u(t) = U_m.\sin \omega.t \qquad (2,49)$$



الشكل (٢-١٣) دارة تفرعية C, L, R

فإن التيار المار أيضاً يكون جيبي ومتناوب:

$$i(t) = I_m.\sin(\omega.t + \varphi) \qquad (2,50)$$

وهذا التيار يتوزع على i_c, i_l, i_R حيث:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) \qquad (2,51)$$

وبما أن:

$$i_R(t) = G.u(t)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}.\int u(t).dt$$

$$i_C(t) = C.\frac{du(t)}{dt} \quad (2,52)$$

وبالتعويض يكون

$$i(t) = G.u(t) + \frac{1}{L}\int u(t).dt + c.\frac{du(t)}{dt} \quad (2,53)$$

$$i(t) = G.U_m.\sin.\omega.t + \frac{1}{L}\int U_m.\sin.\omega.t.dt + c.\frac{d}{dt}.U_m.\sin.\omega.t$$

$$= G.U_m.\sin.\omega.t - \frac{U_m}{\omega.L}.\cos\omega.t + \omega.C.U_m.\cos\omega.t$$

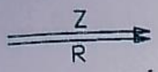
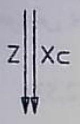
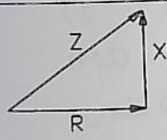
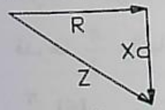
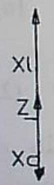
$$= G.U_m\sin.\omega.t + \frac{U_m}{\omega.L}\sin\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right) + \omega.C.U_m.\sin\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right)$$

(2,54)

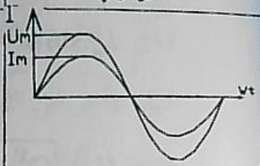
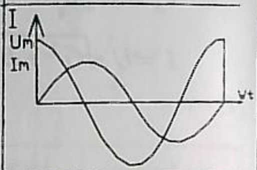
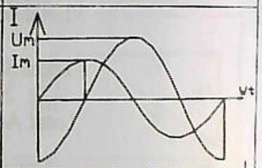
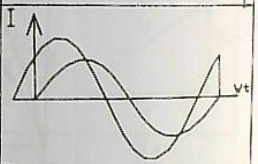
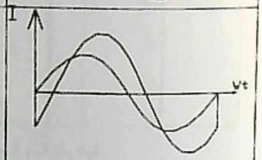
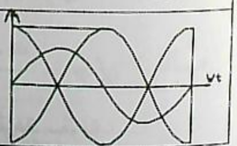
من هذه العلاقة نلاحظ أن التيار المار في المقاومة يتفق بالطور مع التوتر المطبق بينما التيار المار في الملف يتأخر على التوتر المطبق بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$ والتيار المار في المكثف يتقدم على التوتر المطبق بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$.[6]

$$I_m.\sin(\omega.t + \varphi) = G.U_m.\sin\omega.t - \frac{U_m}{\omega.L}.\cos\omega.t + \omega.C.U_m.\cos\omega.t \quad (2,55)$$

بالمقارنة بين طرفي العلاقة يكون

	الاستطاعة	مثلث الممانعات
منحني الاستطاعة دائماً فوق محور السينات وهذا يعني أن الاستطاعة دائماً موجبة وذات اتجاه واحد	$p=U_m.I_m.\sin^2\omega t$ $=U.I-U.I.\cos(2.\omega t)$	
القيمة الوسطية للاستطاعة تساوي الصفر (المكثف يتشحن بأحد الأرباع ويفرغ بالربع الآخر) وبالتالي الاستطاعة المستهلكة تساوي الصفر	$p=-\frac{U.I}{2}.\sin(2.\omega t)$	
القيمة الوسطية للاستطاعة تساوي الصفر أي أن الاستطاعة الفعلية المستهلكة في حمل تحريضي بحت دائماً تساوي الصفر	$p=\frac{U.I}{2}.\sin(2.\omega.t)$	
$U.I.\cos\varphi$ ثابت لا يتعلق بالزمن $U.I.\cos(2.\omega t+\varphi)$ يتعلق بالزمن وله تردد يساوي ضعف تردد التيار من التوتر	$p=UI.\cos.\varphi$ $-UI\cos(2.\omega.t+\varphi)$	
$U.I.\cos\varphi$ ثابت لا يتعلق بالزمن $U.I.\cos(2.\omega t+\varphi)$ يتعلق بالزمن وله تردد يساوي ضعف تردد التيار من التوتر	$p=UI.\cos.\varphi$ $-UI\cos(2.\omega.t+\varphi)$	
$U.I.\cos\varphi$ معدوم لأن $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ لا توجد استطاعة حقيقية	$p=UI.\cos.\varphi$ $-UI\cos(2.\omega.t+\varphi)$	

جدول رقم -١-

الدارة	الممانعة الكلية	العلاقة بين التوتر والتيار	فرق الصفحة	التمثيل الزمني
مقاومة أومية بحتة	$Z = R$ $X = 0$	$U = I.R$	$\varphi = 0$	
سعة بحتة	$Z = \frac{1}{\omega.c}$ $R = 0$	$U = I.\frac{1}{\omega.c}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	
محارضة بحتة	$R = 0$ $Z = \omega.L$	$U = I.\omega.L$	$\varphi = +\frac{\pi}{2}$	
مقاومة وملف على التسلسل	$Z=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$	$U=I\sqrt{R^2+X^2}$	$\varphi=tg^{-1}\frac{\omega L}{R}$	
مقاومة ومكثف على التسلسل	$Z=\sqrt{R^2+(\frac{1}{\omega C})^2}$	$U=I\sqrt{R^2+X^2}$	$\varphi=tg^{-1}\frac{1}{\omega cR}$	
ملف ومكثف على التسلسل	$Z=\omega L-\frac{1}{\omega c}$ $R=0$	$U=I\sqrt{(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$	$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$	

$$I_m.\cos\varphi = G.U_m$$

$$I_m.\sin\varphi = \omega.C - \frac{1}{\omega.L} \qquad (2,56)$$

من هاتين العلاقتين نجد أن:

$$I_m = U_m.\sqrt{G^2 + (\omega.C - 1/_{\omega.L})^2}$$

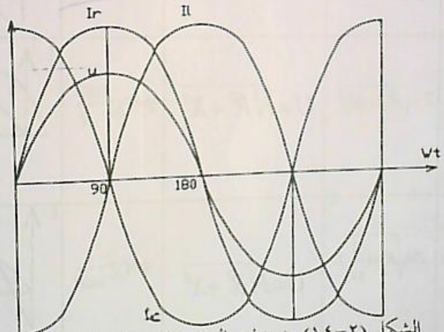
$$I = U.\sqrt{G^2 + B^2} = U.Y \qquad (2,57)$$

حيث:

G: الناقلية الكلية للدارة Total conductance

B: المسايرة الكلية للدارة Total Susceptance

Y: السماحية الكلية للدارة Total Admittance



الشكل (٢-١٤) منحنيات التوتر والتيار لدارة C, L, R تفرعية.

$$tg\ \varphi = \frac{\omega.C - 1/_{\omega.L}}{G} \qquad (2,58)$$

أ- $B_C > B_L \Leftarrow B > 0$ الدارة ذات طبيعة سعوية

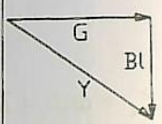
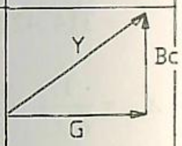
التيار يتقدم على التوتر بزاوية φ

ب- $B_L > B_C \Leftarrow B < 0$ الدارة ذات طبيعة تحريضية

التيار يتأخر عن التوتر بزاوية φ

جـ- $B_L = B_C \Leftarrow B = 0$ الدارة ذات طبيعة أومية $\varphi = 0$

ومنها أيضاً يمكن أن نحصل على الحالات الخاصة المبينة على الجدول رقم-٢-

الدارة	السماحية الكلية	العلاقة بين I,U	فرق الصفحة	مثلث السماحيات
L, R تفرعية	$Y=\sqrt{G^2+\left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$	$U=I\sqrt{G^2+\left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$	$\varphi=tg^{-1}\cdot\frac{R}{\omega L}$	
C, R تفرعية	$Y=\sqrt{G^2+(\omega C)^2}$	$U=I\sqrt{G^2+(\omega C)^2}$	$\varphi=tg^{-1}\cdot\frac{\omega C}{G}$	
C, L تفرعية	$Y=\omega C-\frac{1}{\omega L}$	$U=I(\omega C-\frac{1}{\omega L})$	$\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$	

جدول رقم -٢-

مسألة ٢-١:

لدينا الدارة التسلسلية التي تحوي العناصر التالية:

$C = 353.7[\mu F]$، $R = 6[\Omega]$، $L = 42.97[mH]$ ، يمر فيها تيـــار متنـــاوب معطى بالعلاقة $i = 14,14\ \sin(\omega t)[A]$ بتردد $f = 50[Hz]$ والمطلـــوب حساب: **[12]**

١- احسب قيمة Z وارسم مثلث الممانعات.

٢- القيمة الفعالة للتيار والتوتر.

٣- هبوطات التوتر على C,L,R وارسم مثلث التوترات.

٤- المركبة الفعلية والردية للتوتر.

الحل:

١-

$$X_L = \omega.L = 2\pi.f.L$$
$$= 314.42,97.10^{-3} = 13,5.[\Omega]$$

$$X_C = \frac{1}{\omega.C}$$
$$= \frac{1}{314.353,7.10^{-6}} = 9.[\Omega]$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)}$$
$$= \sqrt{6^2 + (13.5 - 9)^2} = 7.5[\Omega]$$

٢-

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{14,14}{\sqrt{2}} = 10[A]$$
$$U = I.Z = 10 \times 75 = 75[V]$$

٣-

$$U_R = I.R = 10 \times 6 = 60[V]$$

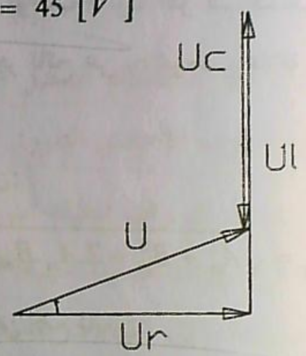
$$U_L = I.X_L = 10 \times 13{,}5 = 135[V]$$

$$U_C = I.X_C = 10 \times 9 = 90[V]$$

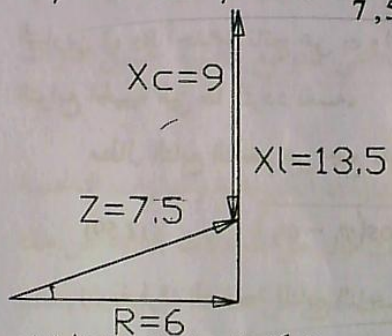
٤-

$$U_a = U\ .\cos\ \varphi = 75\ .\frac{6}{7{,}5} = 60\ [V]$$

$$U_r = U\ .\sin\ \varphi = 75\ .\frac{4{,}5}{7{,}5} = 45\ [V]$$



الشكل (٢-١٥-أ) مثلث التوترات



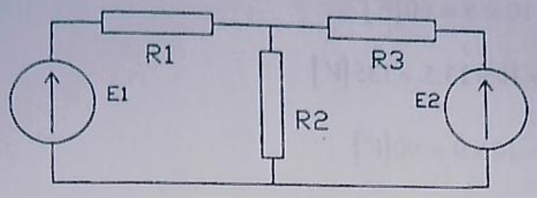
الشكل (٢-١٥-ب) مثلث الممانعات

مسألة (٢-٢):

احسب مطال التيار المار في المقاومة R_2 وزاوية طوره بالنسبة لزاوية طور القوة المحركة الكهربائية e_1 مع العلم أن:[12]

$$e_1 = E_{1m}.\sin.\omega t$$

$$e_2 = E_{2m}.\sin(\omega t + \varphi)$$



الشكل (٢-١٦)

الحل:

نحسب التيار المار في المقاومة R_2 بموجب قانون التراكم كمجموع التيارين في R_2 أحدهما ناتج عن e_1 والآخر ناتج عن e_2 بموجب علاقة جمع التوابع الجيبية التي لها التردد نفسه،

مطال التابع الناجم عن جمع تابعين:

$$C_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2 + 2.A_m.B_m.\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (2,59)$$

زاوية فرق الصفحة للتابع الناجم عن جمع تابعين:

$$\varphi = tg^{-1}\frac{A_m.\sin\varphi_1 + B_m.\sin\varphi_2}{A_m.\cos\varphi_1 + B_m.\cos\varphi_2} \qquad (2,60)$$

$$i_2 = i_2(e_1) + i_2(e_2)$$

$$= \frac{e_1}{R_1 + (R_2 // R_3)}.\frac{R_3}{R_2 + R_3} + \frac{e_2}{R_3 + (R_1 // R_2)}.\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{E_{1m}R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.\sin\omega t + \frac{E_{2m}.R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.\sin(\omega t + \varphi)$$

من العلاقتين (2,59) و(2,60) نجد

$$I_m = \frac{\sqrt{(E_{1m}.R_3)^2 + (E_{2m}.R_1)^2 + 2.E_{1m}.R_3.E_{2m}.R_1.\cos\varphi}}{R_1.R_2 + R_1.R_3 + R_2.R_3}$$

$$\phi = tg^{-1}.\frac{E_{2m}.R_1.\sin.\varphi}{E_{1m}.R_3 + E_{2m}.R_1.\cos.\varphi}$$

وبالتالي i_2 هو:

$$i_2 = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

٢-٤: استخدام التمثيل الشعاعي للتوابع الجيبية لحل دارات التيار المتناوب الأحادي الطور:

بما أن التوترات المطبقة على الدارات الكهربائية والتيارات الناتجة عنها هي توترات متناوبة جيبية. لذلك فإن حل المعادلات الناتجة عن هذا التطبيق يحتاج إلى حسابات معقدة. وللتخلص من هذه المشكلة يتم استخدام عدة طرائق ذات مرونة أكثر ونذكر منها طريقة التمثيل الشعاعي.**[10]**

إذا كان لدينا تابع جيبي من الشكل

$$u = U_m \cos(\omega.t + \varphi) \qquad (2,60)$$

فإن هذا التابع يمكن أن نمثله بشعاع دوار نسبة لمحور الإحداثيات XOY حيث أن بداية هذا الشعاع تنطبق على مبدأ الإحداثيات ، ونهايته تقع في النقطة A وطول هذا الشعاع $\overline{oA}$ مساوٍ

لمطال التابع الجيبي ويصنع زاوية $(\omega.t+\varphi)$ مع المحور X كما في الشكل (٢-١٧).

ولأن الزاوية تابع للزمن فإن الشعاع سوف يدور حول مبدأ الإحداثيات بسرعة زاوية ω ثابتة.

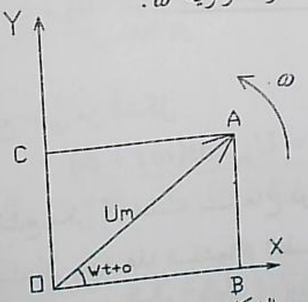
مسقط الشعاع على المحور X هو:

$$\overline{OB} = OA \cdot \cos(\omega . t + \varphi) \qquad (2,61)$$

وبالتالي فإن الشعاع $\overline{oA}$ تابع جيبي ومسقطه على المحور X يعطي القيمة الآنية للتابع في كل لحظة.

يسمى المحور X محور الزمن (أو محور زاوية الطور).

نلاحظ أيضاً أن استخدام الأشعة الدوارة لتمثيل التوابع الجيبية صعب نوعاً ما بسبب تغير وضعيتها بالنسبة للزمن. لذلك نستخدم الأشعة الساكنة وذلك بتدوير مستوي محاور الإحداثيات بسرعة زاوية قدرها ω في اتجاه دوران الشعاع $\overline{OA}$ نفسه، عندها يبدو وكأنه ثابت لا يتحرك بينما تدور المحاور بسرعة زاوية ω.

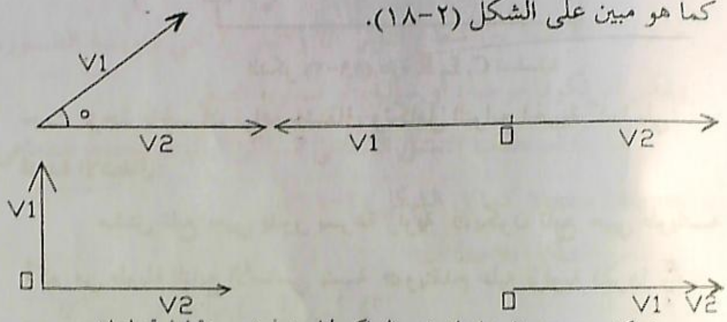


الشكل (٢-١٧) التمثيل الشعاعي لتابع جيبي

يمكن في هذه الحالة عدم رسم محاور الإحداثيات عند رسم الأشعة، أما إذا أردنا تحديد طور الشعاع باللحظة t = 0 فإن المحور الأفقي يرسم لوحده.

يجب الانتباه عند استخدام الأشعة الساكنة لتمثيل التوابع إلى أن التوابع كافة يجب أن تكون ذات سرعة نبضية واحدة.

نبين فيما يلي بعض التوابع الممثلة بأشعة ساكنة وبزوايا طور بينهما كما هو مبين على الشكل (٢-١٨).



الشكل (٢-١٨) التمثيل الشعاعي الساكن لتابعين ذوي سرعة نبضية واحده.

٢-٤-١ دارة تحوي C, L, R على التسلسل:

عند تطبيق التوتر المتناوب u(t) على الدارة المبنية على الشكل (٢-١٩) فإنه سوف يمر تيار i(t) له تردد التوتر المطبق نفسه.**[12]**

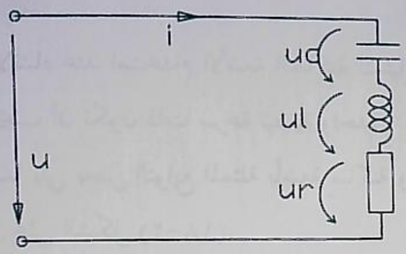
$$u = u_R + u_L + u_C \qquad (2,62)$$

$$u = R.i + L.\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i.dt \qquad (2,63)$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى غير متجانسة يمكن حلها باستخدام التمثيل الشعاعي حيث:

$$\overline{U} = \overline{U_R} + \overline{U_L} + \overline{U}_C$$

$$= R.\overline{I} + \omega.L.\overline{I} + \frac{1}{\omega.c}.\overline{I} \qquad (2,64)$$



الشكل (٢-١٩) دارة C, L, R تسلسلية

حيث تؤخذ بالحسبان قواعد اشتقاق وتكامل التوابع الجيبية كما يلي:

قاعدة الاشتقاق:

مشتق تابع جيبي يدور بسرعة زاوية ω يكون تابع جيبي طويلته أكبر من طويلة التابع الأساسي بنسبة ω ويتقدم عليه بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$.

قاعدة التكامل:

تكامل تابع جيبي يدور بسرعة زاوية ω يكون تابع جيبي طويلته تنقص بنسبة ω ويتأخر عليه بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$.

يمكن تمثيل العلاقة الأخيرة شعاعياً كما يلي:

- من النقطة 0 نرسم الشعاع بطول يساوي المطال الأعظمي (أو القيمة الفعالة) وزاوية مساوية $\omega.t$.
- نرسم الشعاع الذي ينطبق عليه والممثل للقيمة $\overline{U_R} = R.\overline{I}$.

- من رأس الشعاع $\overline{U_R}$ نرسم الشعاع $\overline{U_L} = \omega I.\overline{I}$ العمودي عليه والذي يتقدم بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$.

- من رأس الشعاع $\overline{U_L}$ نرسم الشعاع $\overline{U_C} = \frac{\overline{I}}{\omega.c}$ العمودي على الشعاع $\overline{I}$ والذي يتقدم بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$.

- نصل مبدأ الإحداثيات مع رأس الشعاع $\overline{U_C}$ فنحصل علـى الـشعاع $\overline{U}$.

- الزاوية الحاصلة بين شعاع التوتر $\overline{U}$ والتيار $\overline{I}$ هي زاويـة الطـور، ويمكن أن تكون موجبة، أو سالبة، أو مساوية الصفر.

أما إذا استخدمنا التمثيل الشعاعي الساكن فيكون المخطط الشعاعي Vector Diagram كما في الشكل (٢-٢١).

من الشكل نلاحظ أن:

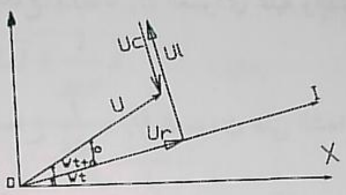
$$U^2 = R^2.I^2 + \left(\omega.L - \frac{1}{\omega.C}\right)^2.I^2$$

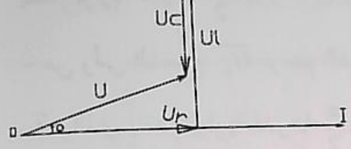
$$U = \sqrt{R^2 + (\omega.L - \frac{1}{\omega.C})^2}.I \qquad (2,65)$$

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega.L - \frac{1}{\omega.C})^2} \qquad (2,66)$$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega.c} \qquad (2,67)$$

$$\varphi = tg^{-1}\frac{\omega.L - \frac{1}{\omega.C}}{R} \qquad (2,68)$$

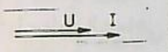
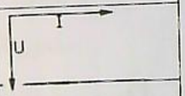
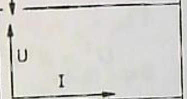
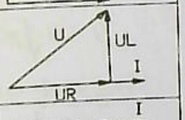
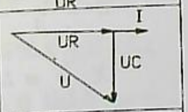




الشكل (٢-٢٠) المخطط الشعاعي لدارة. تسلسلية باستخدام الأشعة الدوارة

الشكل (٢-٢١) المخطط الشعاعي لدارة تسلسلية باستخدام الأشعة الساكنة.

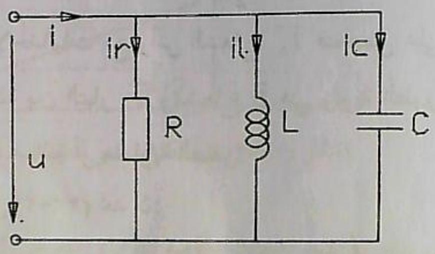
وفيما يلي نبين الحالات الخاصة الناتجة عن التوصيل التسلسلي: **[6]**

الدارة	الممانعة الكلية	زاوية الصفحة	العلاقة بين التوتر والتيار	المخطط الشعاعي
مقاومة بحتة	$Z = R$ $X = 0$	$\varphi = 0$	$\bar{U} = R.\bar{I}$	
سعة بحتة	$Z = -\frac{1}{\omega c}$ $R = 0$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$\bar{U} = \frac{1}{\omega.c}\bar{I}$	
محارضة بحتة	$Z = \omega.L$ $R = 0$	$\varphi = +\frac{\pi}{2}$	$\bar{U} = \omega.L\bar{I}$	
مقاومة وملف	$Z=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$	$\varphi = tg^{-1}\frac{\omega.L}{R}$	$\bar{U}=\bar{I}\sqrt{R^2+(\omega.L)^2}$	
مقاومة ومكثف	$Z=\sqrt{R^2+(\frac{1}{\omega c})^2}$	$\varphi=-tg^{-1}\frac{1}{R\omega C}$	$\bar{U}=\bar{I}\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$	
ملف ومكثف	$Z=\omega L-\frac{1}{\omega C}$ $R=0$	$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$	$\bar{U}=\bar{I}\left(\omega.L-\frac{1}{\omega.C}\right)$	

٢-٤-٢ دارة تحوي C, L, R تفرعية:

عند تطبيق توتر متناوب u(t) على طرفي الدارة المبينة في الشكل (٢-٢٢) فإنه يمر تيار i(t) متناوب له التردد نفسه، وحسب قانون كيرشوف الأول:**[10]**

$$i = i_R + i_L + i_C ..... \quad (2,69)$$



الشكل (٢-٢٢) دارة C, L, R تفرعيه

$$i = G.U + \frac{1}{L}\int u.dt + c.\frac{du}{dt} \quad (2,70)$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى غير متجانسة يمكن حلها باستخدام التمثيل الشعاعي حيث:

$$\overline{I} = \overline{I_R} + \overline{I_L} + \overline{I}_C \quad (2,71)$$

$$\overline{I} = G.\overline{U} + \frac{1}{\omega.L}.\overline{U} + \omega.c.\overline{U} \quad (2,72)$$

وهذه العلاقة يمكن تمثيلها شعاعياً كما يلي:

- من النقطة 0 نرسم الشعاع $\overline{U}$ بطول يساوي المطال الأعظمي (أو القيمة الفعالة).

- نرسم الشعاع الذي ينطبق عليه والممثل للشعاع $\overline{I_R} = G.\overline{U}$.

- من رأس الشعاع $\overline{I_R}$ نرسم الشعاع $\overline{I_C} = \omega.c.\overline{U}$ العمودي عليه والذي يتقدم بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$.

- من رأس الشعاع $\overline{I_C}$ نرسم الشعاع $\overline{I_L} = \frac{1}{\omega.L}.\overline{U}$ العمودي على الشعاع $\overline{I}$ والذي يتقدم بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$.

- نصل مبدأ الإحداثيات مع رأس الشعاع $\overline{I_L}$ فنحصل على الشعاع $\overline{I}$.

والزاوية المتشكلة بين التيار $\overline{I}$ والشعاع $\overline{U}$ هي زاوية الطور ويمكن أن تكون موجبة أو سالبة أو مساوية الصفر.

من الشكل (٢-٢٣) نجد أن:

$$I^2 = G^2 \cdot U^2 + \left(\omega.C - \frac{1}{\omega.L}\right)^2 = U^2 \cdot \left[G^2 + \left(\omega.C - \frac{1}{\omega.L}\right)^2\right] \qquad (2,74)$$

التيار الكلي:

$$I = U\sqrt{G^2 + \left(\omega.C - \frac{1}{\omega.L}\right)^2} \qquad (2,75)$$

السماحية الكلية:

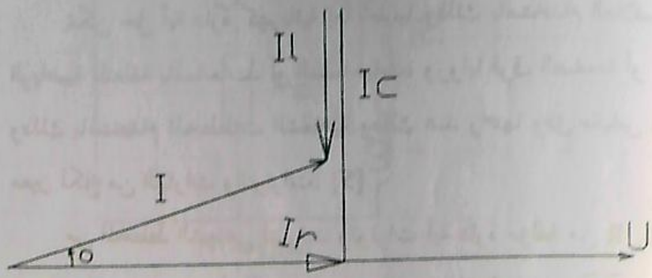
$$Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega.C - \frac{1}{\omega.L}\right)^2} \qquad (2,76)$$

المسايرة الكلية:

$$B = \omega.c - \frac{1}{\omega.L} \qquad (2,77)$$

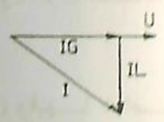
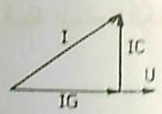
زاوية فرق الصفحة:

$$\varphi = tg^{-1}\frac{\omega.C - \frac{1}{\omega.L}}{G} \qquad (2,78)$$



الشكل (٢-٢٣) المخطط الشعاعي لدارة تفرعية.

ونبين في الجدول التالي الحالات الخاصة للتوصيل التفرعي:[6]

الدارة	الممانعة الكلية	φ	العلاقة بين $\bar{U}$ و $\bar{I}$	المخطط الشعاعي
مقاومة وملف	$Y=\sqrt{G^2+(\frac{1}{\omega L})^2}$ $B=\frac{1}{\omega L}$	$\varphi=-tg^{-1}\frac{R}{\omega L}$	$\bar{I}=\bar{U}\sqrt{G^2+\frac{1}{\omega L})^2}$	
مقاومة ومكثف	$Y=\sqrt{G^2+(\omega C)^2}$ $B=\omega C$	$\varphi=tg^{-1}\omega C.R$	$\bar{I}=\bar{U}\sqrt{G^2+(\omega C)^2}$	
مكثف وملف	$G=0$ $Y=\omega c-\frac{1}{\omega L}$	$\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$	$\bar{I}=\bar{U}\sqrt{\omega C+\frac{1}{\omega L})^2}$	

٢-٤-٣ استخدام المخططات الشعاعية لمعرفة التيارات والتوترات في الدارة:

يمكن حل أية دارة كهربائية إما تحليلياً وذلك باستخدام العلاقات الرياضية المتعلقة بالممانعات، أو السماحيات، وزوايا فرق الصفحة أو بيانياً وذلك باستخدام المخططات الشعاعية وذلك عند رسمها وفق مقياس رسم معين لكل من التيارات والتوترات. [5]

من المخطط الشعاعي لتيارات وتوترات أية دارة مؤلفة من C, L, R نحصل على شعاع محصلة التوترات، وشعاع محصلة التيارات $\overline{I},\overline{U}$. ومن هذين الشعاعين نستطيع تحديد القيمتين المميزتين لممانعة الدارة وهما:

$$Z = \frac{U}{I} \qquad (2,79)$$ القيمة الفعالة للمانعة

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \qquad (2,80)$$ زاوية فرق الصفحة

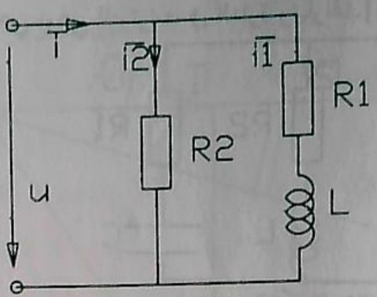
مسألة (٢-٣):

لدينا دارة كهربائية مبينة في الشكل (٢-٢٤) وفيها عناصر التوصيل R_1, R_2, L وذات قيم معروفة، والمطلوب تحديد قيمة الممانعة الكلية وزاوية الطور باستخدام التمثيل الشعاعي. **[11]**

الحل:

نبدأ تصميم المخطط الشعاعي برسم شعاع التيار المار في المقاومة R_1 ، بعد ذلك نرسم شعاع التوتر على كل من R_1 و L ، ومن شعاع التوترين $\overline{U}_{R1},\overline{U}_L$ نحصل على شعاع التوتر الكلي $\overline{U}$، وبذلك نحصل على شعاع

التيار المار في المقاومة R_2.

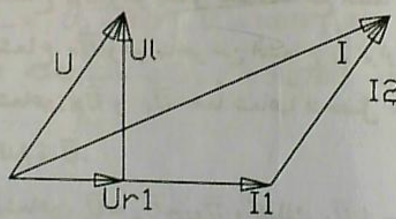


الشكل(٢-٢٤):

عند ذلك يمكن رسم التيار الكلي كما هو مبين على الشكل(٢-٢٥). حينذاك تكون الممانعة الكلية للدارة وزاوية الطور بين التيار والتوتر

$$Z = \frac{U}{R}$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

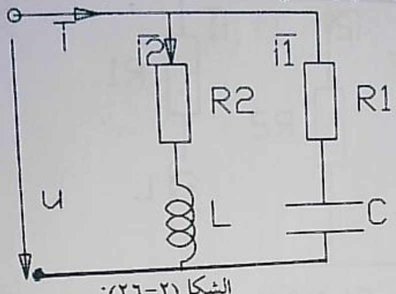


الشكل(٢-٢٥):

مسألة (٢-٤):

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٢- ٢٦) نفترض أن قيم عناصر

توصيل الدارة والتوتر المطبق على مأخذي الدارة معروفة، والمطلوب رسم مخطط شعاعي نوعي للتوترات في الدارة وتياراتها.[11]



الشكل(٢-٢٦):

الحل:

يكون المخطط الشعاعي نوعياً إذا تم تحديد أطوال الأشعة بشكل اختياري وليس بمقياس رسم محدد.

١- نرسم الشعاع $\overline{I}_1$ وهو يمثل التيار i_1 .

٢- نرسم الشعاع $\overline{U}_{R1}$ وهو ينطبق بالصفحة مع الشعاع $\overline{I}_1$.

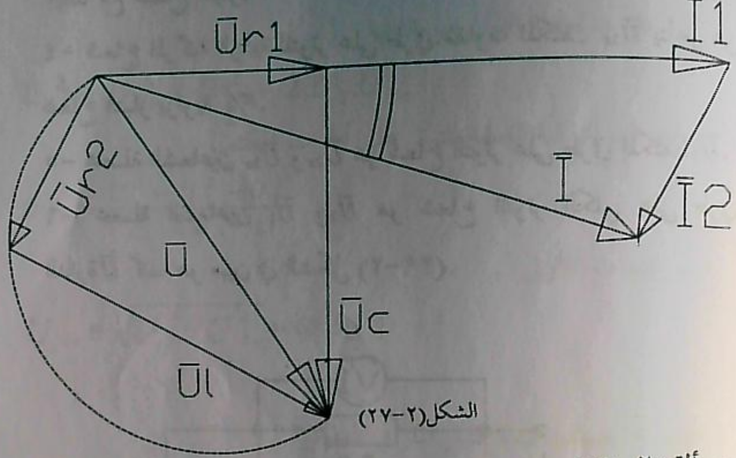
٣- نرسم الشعاع $\overline{U}_C$ وهو يتأخر عن الشعاع $\overline{I}_1$ بزاوية $\pi/2$.

٤- نجمع الشعاعين $\overline{U}_{R1}$ و $\overline{U}_C$ جمعاً شعاعياً فنحصل على شعاع التوتر المطبق على الدارة $\overline{U}$.

٥- بما أن الشعاعين $\overline{U}_{R2}+\overline{U}_L=\overline{U}$ وكذلك $\overline{U}_{R2}\perp\overline{U}_L$ نرسم نصف دائرة قطرها $\overline{U}$ ثم نرسم الشعاعين $\overline{U}_{R2}$ و $\overline{U}_L$ على محيطها مع مراعاة أن الشعاع $\overline{U}_L$ يتقدم على الشعاع $\overline{U}_{R2}$ بزاوية $\pi/2$.

٦- نرسم الشعاع $\overline{I}_2$ ويكون موازياً لشعاع التوتر $\overline{U}_{R2}$.

٧- نجمع الشعاعين $\bar{I}_1$ و $\bar{I}_2$ جمعاً شعاعياً فنحصل على شعاع التيار الكلي $\bar{I}$.



الشكل(٢-٢٧)

مسألة (٢-٥):

المطلوب إيجاد قيمة C وR للمكثف إذا كانت قيم مؤشرات المقاييس $U = 160[V]$, $U_1 = 100[V]$, $U_2 = 80[V]$ وكانت قيمة $R_0 = 43.5[\Omega]$ والتردد $f = 50[Hz]$ وذلك باستخدام المخطط الشعاعي. **[10]**

الحل:

أ – نرسم المخطط الشعاعي لهذه الدارة حسب القيم المعطاة بشكل نوعي

١- نبدأ برسم شعاع التيار لأن قيمته ثابتة، وهذا الشعاع ينطبق مع المحور الأفقي.

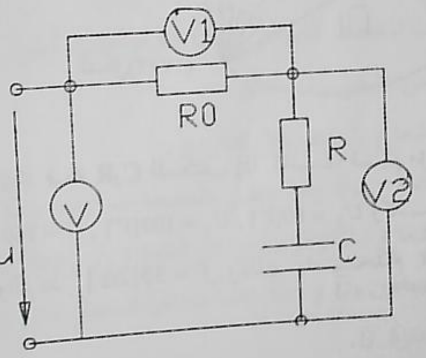
٢- شعاع التوتر $\bar{U}_1$ على طرفي المقاومة R_0 ينطبق بالطور مع شعاع التيار.

٣- شعاع المركبة الفعلية للتوتر على طرفي مقاومة المكثف $\overline{U}_{2a}$ ينطبق أيضاً مع شعاع التيار.

٤- شعاع المركبة الردية للتوتر على طرفي مقاومة المكثف $\overline{U}_{2x}$ يتأخر عن شعاع التيار بزاوية $\pi/2$.

٥- محصلة الشعاعين $\overline{U}_{2a}$ و $\overline{U}_{2x}$ هو شعاع التوتر على طرفي المكثف $\overline{U}_2$.

٦- محصلة الشعاعين $\overline{U}_1$ و $\overline{U}_2$ هو شعاع التوتر الكلي على طرفي الدارة $\overline{U}$ كما هو مبين في الشكل (٢-٢٩).



الشكل(٢-٢٨)

ب – تحديد مركبات التوتر

١- من المثلث ABC نجد أن:

$$U_2^2 = U_{2a}^2 + U_{2x}^2$$

٢- من المثلث OAB نجد:

$$U^2 = (U_{2a}^2 + U_1^2) + U_{2x}^2$$

٣- نطرح المعادلة الأولى من الثانية

$$U^2 - U_2^2 = U_1^2 + 2.U_1.U_{2a}$$

ومنها نجد المركبة الفعلية للتوتر على أطراف المكثف

$$U_{2a} = \frac{U^2 - U_2^2 - U_1^2}{2.U_1}$$

ومن المعادلة الأولى

$$U_{2x} = \sqrt{U_2^2 - U_{2a}^2} = 65,5[V]$$

جـ - حساب قيمة التيار المار في الدارة

$$I = \frac{U_1}{R_0} = 2,3[A]$$

د - إيجاد قيمة R و C للمكثف

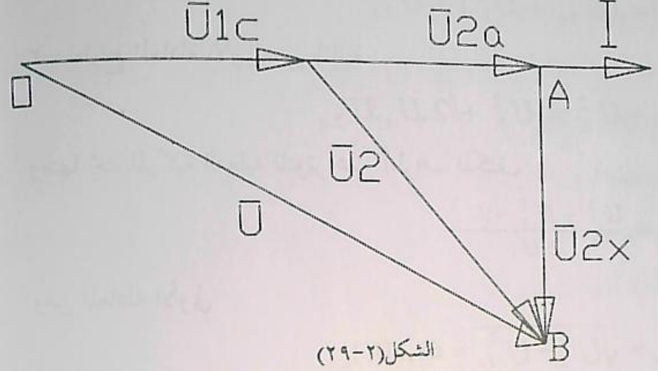
$$U_{2a} = I.R \Rightarrow R = \frac{U_{2a}}{I} = 20\,[\Omega]$$

$$U_{2x} = I.x_c \Rightarrow x_c = \frac{U_{2x}}{I}$$

$$x_c = \frac{1}{\omega.c} \Rightarrow c = \frac{1}{\omega.x_c}$$

$$c = \frac{I}{\omega.U_{2x}} = \frac{2,3}{2\pi.50.65,5} = 112\,[\mu F]$$

هـ – المخطط الشعاعي

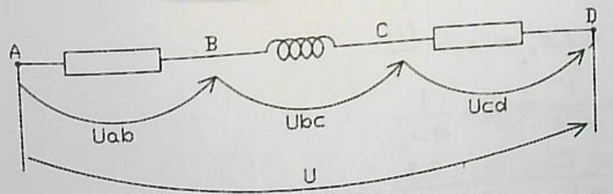


الشكل(٢-٢٩)

مسألة (٢-٦):

دارة تيار متناوب تسلسلية كما في الشكل (٢-٣٠) تحوي العناصر التالية:مقاومة R_{AB}، ومقاومة R_{CD}، وملف ذو مقاومة R_L، و محارضة L ، عند تطبيق توتر قدره $U = 200[V]$ بتردد $f = 50[Hz]$ كان التيار المار $I = 10[A]$ وكانت التوترات التالية:

$$U_{AB} = 80[V], U_{BC} = 100[V], U_{AC} = 145[V]$$



الشكل(٢-٣٠)

المطلوب:

أ- حساب قيمة R_L و L

ب- حساب قيمة R_{CD} و U_{CD}.

جـ - رسم المخطط الشعاعي للتوترات والتيارات.**[12]**

الحل:

أ-

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{80}{10} = 8[\Omega]$$

$$U_{BC} = I.\sqrt{R_L^2 + (\omega.L)^2}$$

$$100 = 10\sqrt{R_L^2 + (\omega.L)^2}$$

$$R_L^2 + (\omega.L)^2 = 100$$

$$U_{AC} = I.\sqrt{(R_{AB} + R_L)^2 + (\omega.L)^2}$$

$$(8 + R_L)^2 + (\omega.L)^2 = (145/10)^2$$

وبحل المعادلات نجد

$$R_L = 2,89\ [\Omega]$$

$$L = 0,03\ [H]$$

ب-

$$U = I.\sqrt{(R_{AB} + R_L + R_{CD})^2 + (\omega.L)^2}$$

$$200 = 10\sqrt{(8 + 2,98 + R_{CD})^2 + 9,42^2}$$

$$R_{CD} = 6,75[\Omega]$$

$$U_{CD} = 10.6,75 = 67,5[V]$$

جـ- المخطط الشعاعي

١- شعاع التيار ينطبق على المحور الأفقي وشعاع التوتر U_{AB} ينطبق على المحور الأفقي

٢- شعاع المركبة الفعلية للتوتر U_{BC} ينطبق مع شعاع التيار

$$U_a = I.R_L = 28,2[V]$$

٣- شعاع المركبة الردية للتوتر U_{BC} يتقدم على شعاع التيار بزاوية $\pi/2$

$$U_X = I.\omega.L = 94,2[V]$$

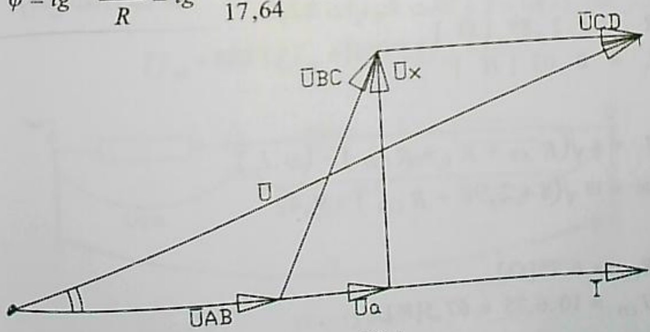
٤- محصلة الشعاعين $\overline{U}_a$ و $\overline{U}_X$ عبارة عن الشعاع $\overline{U}_{BC}$.

٥- شعاع التوتر $\overline{U}_{CD}$ يوازي شعاع التيار.

٦- نصل النقطة A مع النقطة D فنحصل على شعاع التوتر الكلي المطبق على طرفي الدارة.

٧- الزاوية φ هي زاوية فرق الصفحة بين التيار والتوتر

$$\varphi = tg^{-1}\frac{\omega.L}{R} = tg^{-1}\frac{9,42}{17,64} = 28^o$$



الشكل(٢-٣١)

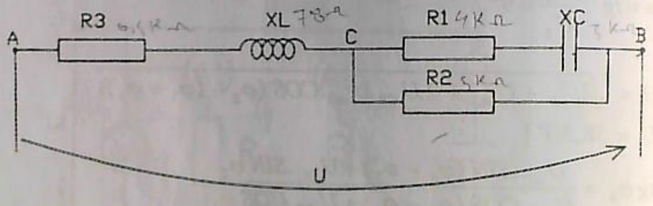
مسألة (٢-٧):

لدينا الدارة المبينة في الشكل(٢-٣٢) وذات العناصر التالية:

$$R_1 = 4[K\Omega], R_2 = 5[K\Omega], R_3 = 0,5[K\Omega]$$

$$X_L = 78[\Omega], X_C = 3[K\Omega]$$

والمطلوب رسم المخطط الشعاعي للتيارات والتوترات، وحساب قيمة التيار والتوتر الكلي، وزاوية الطور بينهما إذا كان التيار **[12]** $I_1 = 10[mA]$



الشكل(٢-٣٢):

الحل:

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 40[V]$$
$$U_c = I_1 \cdot X_c = 30[V]$$
$$U_{CB} = \sqrt{U_1^2 + U_c^2} = 50[V]$$

$$\varphi_2 = tg^{-1} \frac{U_C}{U_1} = -37^o$$

$$I_2 = \frac{U_{CB}}{R_2} = 10[mA]$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2.I_1.I_2.COS(\varphi_1)}$$
$$= 18,96[mA]$$

$$tg\,\varphi_3 = \frac{I_1.SIN\ \varphi_1 + I_2.SIN\ \varphi_2}{I_1.COS\ \varphi_1 + I_2.COS\ \varphi_2}$$

$$= \frac{10\,.10^{-3}.SIN\ (-37^{\,o})}{10\,.10^{-3} + 10\,.10^{-3}.COS\ (-37^{\,o})}$$

$$\varphi_3 = -18{,}5^{\,o}$$

$$U_3 = I.R_3 = 9{,}3[V]$$

$$U_L = I.X_L = 1{,}5[V]$$

$$U_{AC} = \sqrt{U_3^2 + U_L^2} = 9{,}42[V]$$

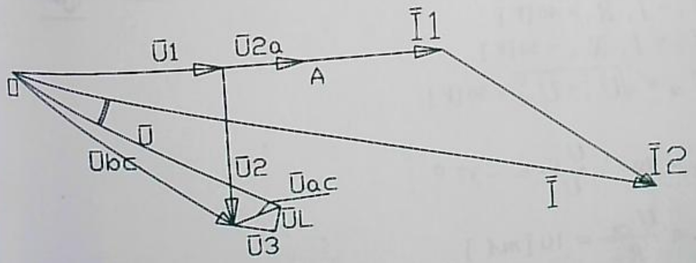
$$\varphi = tg^{-1}\frac{U_L}{U_3} = 9^{o}$$

$$U = \sqrt{U_{CB}^2 + U_{AC}^2 + 2.U_{CB}.U_{AC}.COS\,(\varphi_2 - (\varphi_3 + \varphi_4))}$$

$$U = 58{,}5[V]$$

$$tg\,\varphi_6 = \frac{U_{AC}.SIN\,(\varphi_4 - \varphi_3) + U_{BC}.SIN\,\varphi_2}{U_{AC}.COS\,(\varphi_4 - \varphi_3) + U_{BC}.COS\,\varphi_2}$$

$$\varphi_6 = -33^{\,o}$$



الشكل(٢-٣٣) المخطط الشعاعي

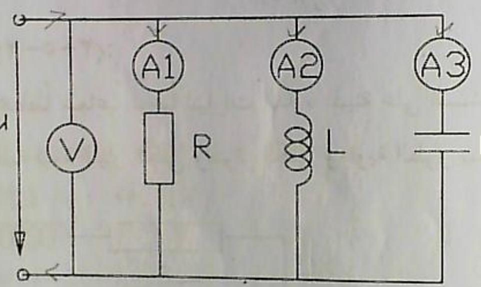
٢-٥: مسائل غير محلولة حول التمثيل الشعاعي:

مسألة(٢-٥-١):

لدينا دارة كهربائية مبينة على الشكل(٢-٣٤)، عند تطبيق توتر متناوب قيمته الفعالة $U = 120[V]$ فإن مقاييس الأمبير أعطت القيم التالية: $I_1 = 2[A], I_2 = 4[A], I_3 = 3[A]$ والمطلوب:

أ- حساب محددات الدارة الكهربائية وشدة التيار الكلي.

ب- حساب محددات ثنائي الأقطاب المكافئ.**[6]**



الشكل(٢-٣٤)

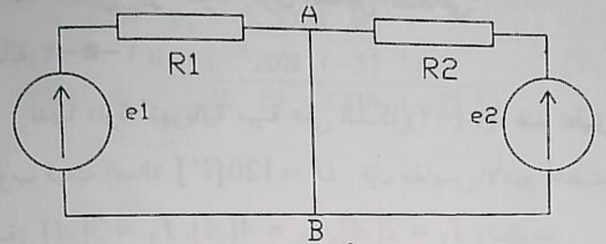
الجواب:

$I = 2,24[A],\ R_{eq} = 47,7[\Omega],\ X_{eq} = -23,85[\Omega]$

مسألة(٢-٥-٢):

المطلوب حساب القيمة اللحظية للتيار المار بين القطتين A و B إذا كان: $e_1 = 20.\sin \omega t[V], e_2 = 20.\sin(\omega t - \pi/2)[V]$ **[9]**

$R_1 = 10[\Omega], R_2 = 10[\Omega]$



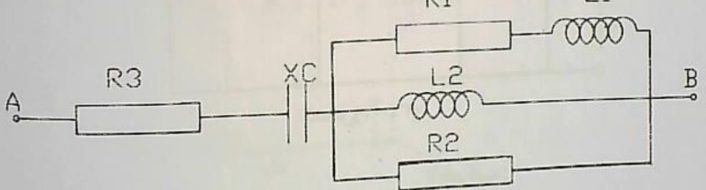
الشكل(٢-٣٥)

الجواب:

$$i_{AB} = -2,83 .\sin(\omega .t - \pi/2)[A]$$

مسألة(٢-٥-٣):

ارسم مخططاً شعاعياً نوعياً لتيارات الدارة المبينة على الشكل (٢-٣٦) وبين عليه قيمة التيار الكلي والتوتر الكلي وزاوية الطور بينهما.**[10]**

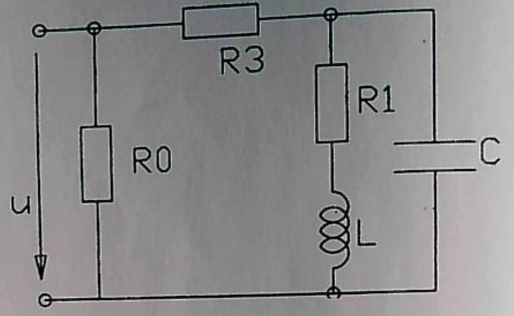


الشكل (٢-٣٦)

مسألة(٢-٥-٤):

المطلوب حساب جميع التيارات والتوترات للدارة المبينة في الشكل (٢-٣٧) ورسم المخطط الشعاعي بمقياس رسم $M_U = 2,5.V/mm$، $M_I = 0,1.A/mm$ علماً أن: **[6]**

$$R_1 = 7[\Omega]\ ,\ R_0 = 39[\Omega]\ ,\ X_C = 44[\Omega]$$
$$X_L = 24[\Omega]\ ,\ R_3 = 4{,}5[\Omega]\ ,\ U = 220[V]$$



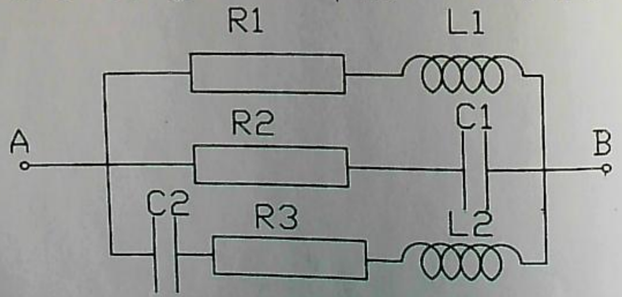
الشكل(٢-٣٧)

مسألة(٢-٥-٥):

لدينا الدارة الكهربائية المبينة في الشكل(٢-٣٨) ذات المحـــددات التالية:

$$R_1 = 3[\Omega], R_2 = 100[\Omega], R_3 = 7[\Omega], L_1 = 0{,}03[H]$$
$$L_2 = 0{,}02[H], f = 50[Hz], C_1 = 400[\mu F], C_2 = 300[\mu F]$$

والمطلوب: حساب التيارات في فروع الدارة والتيار الكلي عند تطبيق توتر كلي قدره $U = 200\ [V]$ وارسم المخطط الشعاعي للتوترات والتيارات.



الشكل (٢-٣٨)

الفصل الثالث

التمثيل العقدي للتوابع الجيبية واستخدامه في حل دارات التيار المتناوب أحادي الطور

٣-١ : طريقة التمثيل العقدي للتوابع الجيبية :[9]

إذا أخذنا شعاعاً ما، ووضعنا بدايته في بداية محوري إحداثيات متعامدين فإن نهاية هذا الشعاع تكون محددة تماماً بإحداثيتين (A_1,A_2) و إذا فرضنا إن هذه المركبات معرفة شعاعياً عندها يمكن أن نكتب :

$$\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 \qquad (3,1)$$

حيث تعني إشارة (+) أن الجمع هو جمع شعاعي ، أما في المستوي القطبي (Polar) فإن الشعاع يمكن أن يمثل بطوله A و الزاوية α التي يصنعها مع المحور الأفقي .

ندرج في المستوي العقدي الأعداد الحقيقية على المحور الأفقي و الأعداد التخيلية على المحور العمودي، و بذلك يمكن كتابة الشعاع $\overline{A}$ على الشكل التالي :

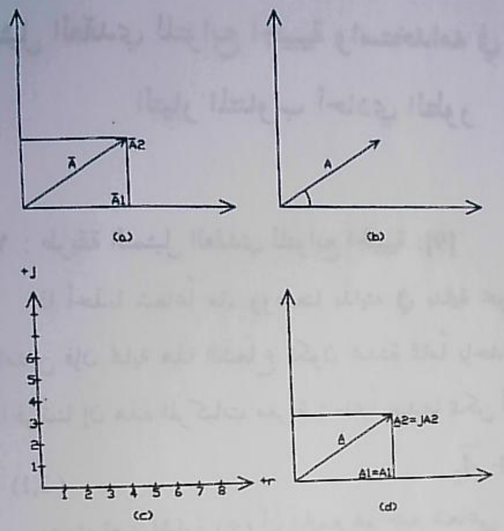
المركبة الحقيقية $\underline{A}_1$ $\qquad \underline{A}_1 = A_1$

المركبة التخيلية $\underline{A}_2$ $\qquad \underline{A}_2 = j\,\underline{A}_2$

وبالتالي:

$$\underline{A} = A_1 + jA_2 \qquad (3,2)$$

ويسمى هذا التمثيل الشكل الديكارتي للشعاع



الشكل(٣-١): التمثيل العقدي للتوابع

من الشكل (٣-١-د) يمكن أن نحسب طول الشعاع A حيث :

$$A = \left|\underline{A}\right| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad (3,3)$$

والزاوية بين $\underline{A}$ و المحور الأفقي :

$$\alpha = tg^{-1}\frac{A_2}{A_1} \qquad (3,4)$$

و تعد الزاوية موجبة إذا قيست باتجاه عكس عقارب الساعة مع مراعاة إشارة الجزء الحقيقي، و إشارة الجزء التخيلي إذا كانت موجبة أو سالبة .

أما إذا أردنا أن نعبر عن A_1 وA_2 بدلالة الزاوية α يمكن أن نكتب :

$$A_1 = A.\cos\alpha$$
$$A_2 = A.\sin\alpha \qquad (3,5)$$

ومنه :

$$A = A.(\cos\alpha + j.\sin\alpha) \qquad (3,6)$$

ويسمى هذا التمثيل الشكل القطبي للشعاع (Polar Form) .

وعند أخذ علاقة أويلر بالحسبان يمكن أن نكتب :

$$e^{j\alpha} = (\cos\alpha + j.\sin\alpha) \qquad (3,6')$$

وبالتالي :

$$\underline{A} = A.e^{j\alpha} \qquad (3,7)$$

وهذا التمثيل يسمى الشكل الأسي للشعاع Exponential Form

و بذلك تكون الأشكال الثلاثة لصياغة الشعاع :

$$\underline{A} = A_1 + jA_2 = A(\cos\alpha + j\sin\alpha) = A.e^{j\alpha} \qquad (3,8)$$

يمكن أن نلاحظ مما سبق ما يلي :

١- يسمى الشعاع الذي طوله يساوي الواحد وحدة الشعاع :

$$e^{j\alpha} = (\cos\alpha + j.\sin\alpha) \qquad (3,9)$$

وإذا أخذت الزاوية α القيم التالية تحدد عندها قيمة الشعاع كما يلي :

$$\alpha = 0 \qquad e^{j0} = (\cos 0 + j.\sin 0) = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad e^{j\pi/2} = (\cos\frac{\pi}{2} + j.\sin\frac{\pi}{2}) = j$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \qquad e^{-j\pi/2} = (\cos\frac{-\pi}{2} + j.\sin\frac{-\pi}{2}) = -j$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{e^{j\pi/2}} = \frac{1}{j}$$

وبالتالي :

$$-\ j = \frac{1}{j} \tag{3,10}$$

$$\alpha = \pi \qquad e^{j\pi} = (\cos\pi + j.\sin\pi) = -1$$

$$\Rightarrow e^{j\pi} = e^{j\frac{\pi}{2}}.e^{j\frac{\pi}{2}} = j.j = -1$$

ومنه :

$$j^2 = -1 \tag{3,11}$$

٢- أما إذا كان الشعاع دواراً (تابعاً جيبياً متغيراً مع الزمن) وزاوية طوره

$$\alpha = \omega.t + \varphi \tag{3,12}$$

فإن الشكل العقدي لهذا الشعاع :

$$\underline{a} = A(\omega.t + \varphi) \tag{3,13}$$

$$\underline{a} = A.e^{j\omega t}.e^{j\varphi} \tag{3,14}$$

$$\underline{a} = A.e^{j\varphi}.e^{j\omega t} = \underline{A}.e^{j\omega t} \tag{3,15}$$

وبالتالي :

$$\underline{A} = A.e^{j\varphi} \tag{3,16}$$

وهو يسمى الشكل العقدي للشعاع الساكن ، ومنه نلاحـــظ أن أي شعاع ساكن يمكن تحويله إلى شعاع دوار عند ضربه بالحد $e^{j\omega t}$

٣-٢ : قواعد حساب الأعداد العقدية : [11]

القاعدة الأولى : مساواة عددين عقديين

نقول عن عددين عقديين أنهما متساويان إذا تساوت القيمة الحقيقية للأول مع القيمة الحقيقية للثاني، والقيمة التخيلية للأول مع القيمة التخيلية للثاني، أو إذا تساوت القيمة المطلقة للأول مع القيمة المطلقة للثاني، وزاوية الطور للأول مع زاوية الطور للثاني :

$$\underline{A} = A_1 + jA_2 = A.e^{j\alpha}$$

$$\underline{B} = B_1 + jB_2 = B.e^{j\beta} \qquad (3,17)$$

$$A_1 = B_1$$

$$A_2 = B_2 \qquad (3,18)$$

$$A = B$$

$$\alpha = \beta \qquad (3,19)$$

القاعدة الثانية : الجمع والطرح

يتم جمع شعاعين عقديين بجمع أجزائهما التخيلية، وأجزائها الحقيقية على حدة كذلك هو الحال بالنسبة لعملية الطرح حيث يتم طرح الأجزاء الحقيقية و الأجزاء التخيلية كل على حدة .

$$\underline{A} \pm \underline{B} = (A_1 \pm B_1) + j(A_2 \pm B_2) \qquad (3,20)$$

القاعدة الثالثة : الجداء والتقسيم

يتم ضرب شعاعين عقديين بضرب قيمتيهما المطلقتين، وجمع زاويتي طورهما، والتقسيم أيضاً يتم بتقسيم القيمة المطلقة للأول على القيمة المطلقة للثاني، و طرح زاوية طور الثاني من زاوية طور الأول.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A \cdot Be^{\ j(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A}{B} e^{\ j(\alpha-\beta)} \quad (3,21)$$

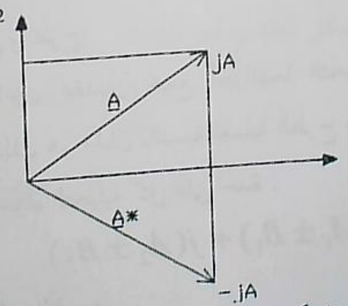
(3,22)

ومنه نلاحظ أن الضرب أو التقسيم بعامل حقيقي يعني تغيير طول الشعاع ، أما الضرب بعامل عقدي يعني تغيير طول الشعاع وتغيير زاوية طوره . أما الضرب بالعامل j يعني تدوير الشعاع بزاوية π/2+ ، والضرب بالعامل j- يعني تدوير الشعاع بزاوية π/2- بينما الضرب بالقيمة العقدية المرافقة للشعاع يعطي قيمة حقيقية فقط ما هو مبين على الشكل (٣-٢) .

$$\underline{A} = A_1 + jA_2 = A.e^{j\alpha} \quad (3,23)$$

$$\underline{A}^* = A_1 - jA_2 = A.e^{-j\alpha} \quad (3,24)$$

$$\underline{A}.\underline{A}^* = A^2$$



الشكل(٣-٢) ضرب الشعاع العقدي بالمرافق

القاعدة الرابعة : الأسس و الجذر

يتم رفع قيمة عقدية إلى قوة n برفع القيمة المطلقة إلى القوة n وبضرب الزاوية بـــ n

$$\underline{A} = A.e^{j\varphi}$$
$$(A)^n = A^n.e^{jn\alpha} \qquad (3,25)$$

والجذر يكون أيضاً على الشكل التالي:

$$\sqrt[n]{\underline{A}} = \sqrt[n]{A}.e^{j(\alpha+2\pi k)/n} \qquad (3,26)$$

القاعدة الخامسة : التفاضل و التكامل

عند مفاضلة شعاع عقدي بالنسبة للزمن يتغير طوله ويدور بزاوية π/2 إلى الأمام ، لذلك يجب أن تكون زاوية الشعاع متعلقة بالزمن أي أن الشعاع هو شعاع دائر

$$\underline{a} = A.e^{j\alpha(t)} \qquad (3,27)$$

ويكون تفاضله بالنسبة للزمن :

$$\frac{d\,\underline{a}}{dt} = \underline{a}_1 = j\frac{d\alpha}{dt}Ae^{j\alpha(t)}$$
$$= j\frac{d\alpha}{dt}\cdot\underline{a} \qquad (3,28)$$

نعوض $\alpha = \omega(t)$ فيكون :

$$\frac{d\,\underline{a}}{dt} = j\omega\cdot\underline{a} \qquad (3,29)$$

أي أن تفاضل شعاع عقدي هو أيضاً شعاع عقدي قيمته المطلقة تزداد بنسبة ω ويدور إلى الأمام بزاوية قدرها $+\pi/2$.

عند مكاملة شعاع عقدي بالنسبة للزمن يتغير طوله ويدور بزاوية $\pi/2$ إلى الوراء.

$$\int \underline{a} \cdot dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{a} \qquad (3,30)$$

أي أن مكاملة شعاع عقدي هو أيضاً شعاع عقدي قيمته تنقص بنسبة ω ويدور إلى الوراء بزاوية قدرها $-\pi/2$.

٣-٣ : استعمال التمثيل العقدي لحل دارات التيار المتناوب الأحادي الطور :[8],[10],[14]

٣-٣-١ : دارة تحوي C , L , R على التسلسل :

عند تطبيق توتر متناوب جيبي على الدارة المبينة في الشكل(٣-٣) التي تحوي عناصر خطية C ,L ,R من الشكل

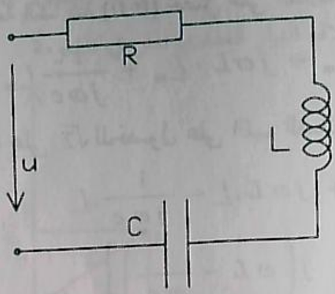
$$u = U_m . \sin \omega t \qquad (3,31)$$

فإنه عند تطبيق قانون كيرشوف الثاني :

$$u = u_R + u_L + u_C \qquad (3,32)$$

وبما أن :

$$\begin{aligned} u_R &= R . i \\ u_L &= L \cdot \frac{di}{dt} \qquad (3,33) \\ u_c &= \frac{1}{c} \int i \cdot dt \end{aligned}$$



الشكل (٣-٣) دارة R,L,C تسلسلية

وعند تحويل الأشعة الجيبية إلى أشعة دوارة يمكن أن نكتب :

$$u(t) \Leftrightarrow \underline{U}_m.e^{j\omega t} \qquad (3,34)$$

حيث : $\underline{U}_m$ المطال العقدي ويساوي

$$\underline{U}_m = U_m.e^{j0} \qquad (3,35)$$

والتيار المار في الدارة أيضاً جيبي ومتناوب من الشكل :

$$i = I_m.\sin(\omega t + \varphi) \qquad (3,36)$$

وبشكله الدوار يمكن أن نكتبه كما يلي :

$$i(t) \Leftrightarrow \underline{I}_m.e^{j\omega t} \qquad (3,37)$$

حيث :

$$\underline{I}_m = I_m.e^{j\varphi} \qquad (3,38)$$

وبالتعويض في معادلة تشغيل الدارة (3,31) يكون :

$$\underline{U}_m e^{j\omega t} = R\cdot\underline{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L\cdot\underline{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega c}\underline{I}_m e^{j\omega t} \qquad (3,39)$$

وبالانتقال إلى الأشعة الساكنة (t=0) نحصل على العلاقة التالية :

$$\underline{U}_m = R \cdot \underline{I}_m + j\omega L \cdot \underline{I}_m + \frac{1}{j\omega c}\underline{I}_m \qquad (3,40)$$

بتقسيم طرفي العلاقة على $\sqrt{2}$ للحصول على القيم الفعالة العقدية :

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} + j\omega L . \underline{I} + \frac{1}{j\omega c} . \underline{I}$$

$$\underline{U} = \underline{I}\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)\right]$$

$$\underline{U} = \underline{I} . \underline{Z}$$

(3,41)

حيث : $\underline{Z}$ الممانعة العقدية للدارة التسلسلية :

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right) \qquad (3,43)$$

ويمكن أن نعبر عنها بالشكل الأسي :

$$\underline{Z} = Z . e^{j\varphi} \qquad (3,44)$$

حيث :Z القيمة الفعالة للممانعة :

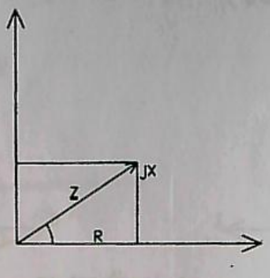
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2} \qquad (3,45)$$

φ زاوية طور الممانعة و تساوي :

$$\varphi = tg^{-1}\frac{X}{R}$$

$$= tg^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R} \qquad (3,46)$$

تمثل علاقة الممانعة العقدية في المستوي العقدي كما في الشكل (٣-٤)، وبالتالي فإن علاقة التيار العقدي المار في المقاومة :



الشكل(٣-٤) تمثيل $\underline{Z}$ في المستوي العقدي.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{Ue^{j0}}{Ze^{j\varphi}} = Ie^{-j\varphi} \qquad (3,47)$$

والقيمة اللحظية العقدية للتيار المار في الدارة :

$$\underline{i} = \sqrt{2}\,\underline{I}e^{j\omega t} = \sqrt{2}Ie^{-j\varphi}\cdot e^{j\omega t} = I_m e^{j(\omega t-\varphi)} \qquad (3,48)$$

$$\underline{i} = I_m \cos(\omega t - \varphi) + jI_m \sin(\omega t - \varphi) \qquad (3,49)$$

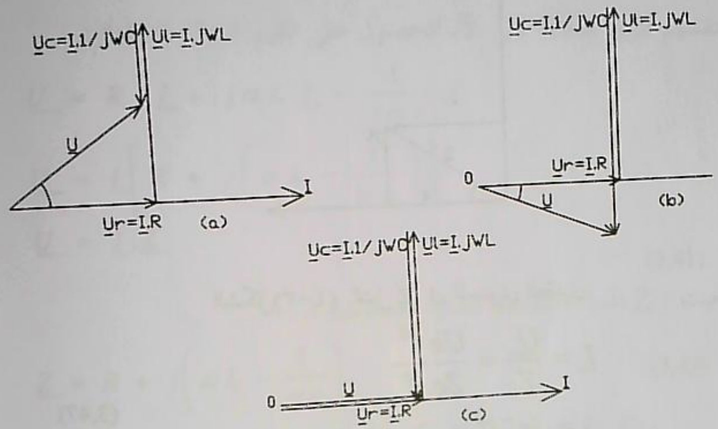
وبما أن التوتر المطبق على طرفي الدارة عبارة عن الجزء التخيلي للقيمة العقدية للتوتر

$$u = U_m . \sin \omega t \qquad (3,50)$$

فإن التيار أيضاً هو الجزء التخيلي للقيمة اللحظية العقدية للتيار :

$$i = \mathrm{Im}[\underline{i}] = I_m \sin(\omega t - \varphi) \qquad (3,51)$$

$$i = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)}} \sin\left(\omega t - tg^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}\right) \qquad (3,52)$$



الشكل(٣-٥) المخطط الشعاعي لدارة تسلسلية R,L,C

أ- X>0 ⇐ $\varphi > 0$ توتر متقدم Leading

ب- X<0 ⇐ $\varphi < 0$ توتر متأخر Lagging

جـ- X=0 ⇐ $\varphi = 0$ حالة أومية بحتة

ويمكن الحصول على الحالات الخاصة التالية من الحالة العامة السابقة :

٣-٣-١-١ : حالة مقاومة وملف على التسلسل :[10],[14]

الممانعة العقدية في هذه الحالة :

$$\underline{Z} = R + j\omega.L \qquad (3,53)$$

التيار العقدي المار في الدارة يساوي :

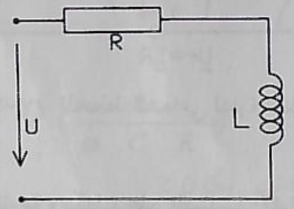
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{Ue^{j0}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot e^{j\varphi}} \qquad (3,54)$$

$$\underline{I} = I \cdot e^{-j\varphi} \qquad (3,55)$$

حيث:

القيمة الفعالة للتيار

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \qquad (3,56)$$



الشكل (٣-٦) دارة L,R تسلسلية

زاوية فرق الصفحة

$$\varphi = tg^{-1} \frac{\omega L}{R} \qquad (3,57)$$

وإذا كان التوتر المطبق من الشكل :

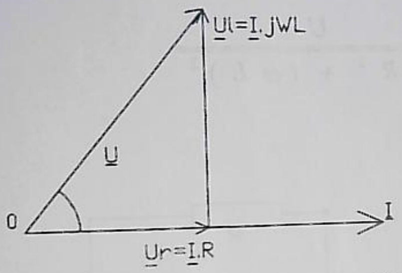
$$u = U_m \sin \omega t \qquad (3,58)$$

وأردنا العودة من الشكل العقدي إلى الشكل الجيبي فإن التيار يكون على الشكل التالي :

$$i = I_m[\underline{i}]$$

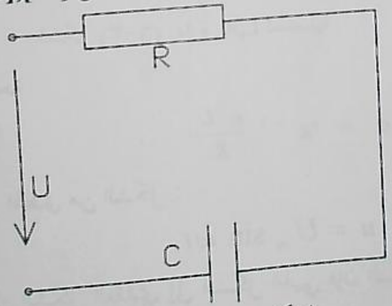
$$= I_m\left[\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\omega t-\varphi)+j\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t-\varphi)\right]$$

$$i = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t - tg^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \qquad (3,59)$$



الشكل(٣-٧) المخطط الشعاعي لدارة تسلسلية R,L

٣-٣-١-٢: حالة مقاومة ومكثف على التسلسل:[14],[10]



الشكل(٣-٨) دارة R,C تسلسلية

الممانعة العقدية للدارة:

$$\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega c} \tag{3,60}$$

التيار العقدي المار في الدارة

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{Ue^{j0}}{\sqrt{R^{2} + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^{2}}\, e^{-j\varphi}} \tag{3,61}$$

$$= I \cdot e^{j\varphi}$$

القيمة الفعالة للتيار

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^{2} + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^{2}}} \tag{3,62}$$

زاوية فرق الطور

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{1}{\omega . C . R}\right) \tag{3,63}$$

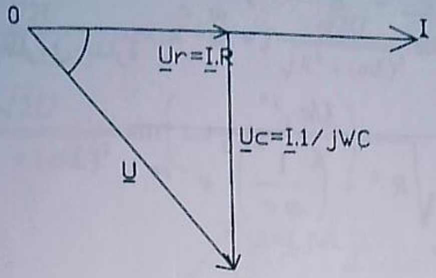
وبالعودة إلى الشكل الجيبي يكون :

$$i = \mathrm{Im}[\underline{i}]$$

$$i = \mathrm{Im}\left[\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^{2} + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^{2}}}\cos(\omega t + \varphi) + j\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^{2} + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^{2}}}\sin(\omega t + \varphi)\right]$$

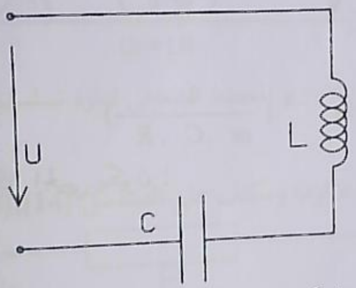
$$i = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^{2} + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^{2}}}\sin(\omega t + \varphi)$$

(3,64)



الشكل(٣-٩) مخطط شعاعي لدارة C,R تسلسلية

٣-٣-١-٣ : حالة ملف و مكثف على التسلسل :[14],[10]



الشكل(٣-١٠) دارة L,C تسلسلية

الممانعة العقدية للدارة:

$$\underline{Z} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right) \qquad (3,65)$$

التيار المار :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{Ue^{j0}}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)} \cdot e^{j\varphi}} \qquad (3,66)$$

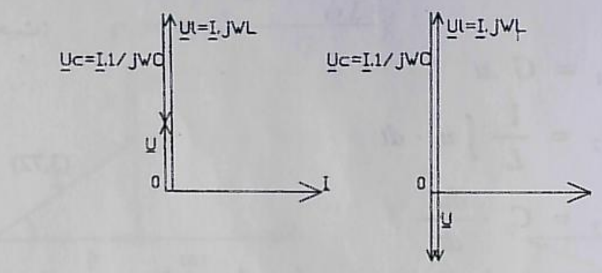
$$= I \cdot e^{-j\varphi}$$

القيمة الفعالة للتيار:

$$I = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega L + \frac{1}{\omega c}\right)^2}} \quad (3,67)$$

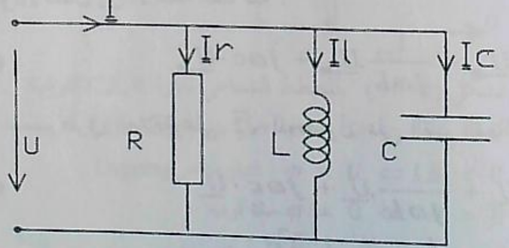
زاوية فرق الصفحة

$$\varphi = \pm \pi/2 \quad (3,68)$$



الشكل(٣-١١) مخطط شعاعي لدارة L,C تسلسلية

٣-٣-٢ : دارة تحوي C,L, R على التفرع:[8], [10],[14]



الشكل(٣-١٢) دارة L,C,R تفرعية

عند تطبيق توتر جيبي و متناوب من الشكل :

$$u = U_m \sin \omega t \qquad (3,69)$$

فإنه يمر تيار جيبي ومتناوب من الشكل:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) \qquad (3,70)$$

وحسب قانون كيرشوف الأول يكون :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \qquad (3,71)$$

حيث:

$$i_1 = G.u$$

$$i_2 = \frac{1}{L}\int u \cdot dt \qquad (3,72)$$

$$i_3 = C \cdot \frac{du}{dt}$$

وبالتعويض عن التوابع الجيبية بأشعة دوارة نحصل على العلاقة التالية :

$$\underline{I}_m e^{j\omega t} = G.\underline{U}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega L}.\underline{U}_m e^{j\omega t} + j\omega c \cdot \underline{U}_m e^{j\omega t} \qquad (3,73)$$

وبالانتقال إلى الأشعة الساكنة :

$$\underline{I}_m = G.\underline{U}_m + \frac{1}{j\omega L}.\underline{U}_m + j\omega c \cdot \underline{U}_m \qquad (3,74)$$

نقسم طرفي العلاقة على $\sqrt{2}$ للحصول على القيم الفعالة العقدية :

$$\underline{I} = G.\underline{U} + \frac{1}{j\omega L}.\underline{U} + j\omega c \cdot \underline{U} \qquad (3,75)$$

$$\underline{I} = \underline{U}\left[G + j\left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right)\right] = \underline{U} \cdot \underline{Y} \qquad (3,76)$$

حيث : $\underline{Y}$ السماحية العقدية للدارة :

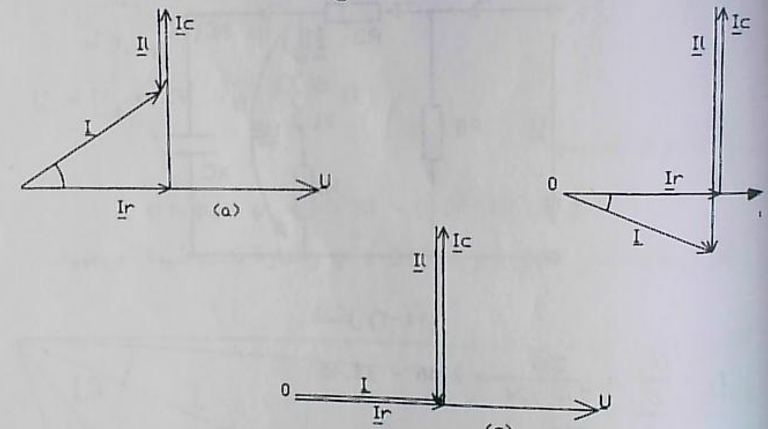
$$\underline{Y} = G + j\left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right) \qquad (3,77)$$

المسايرة الكلية :

$$B = \omega c - \frac{1}{\omega L} \qquad (3,78)$$

زاوية فرق الصفحة:

$$\varphi = tg^{-1}\frac{\omega c - \frac{1}{\omega L}}{G} \qquad (3,79)$$



الشكل (٣-١٣) المخطط الشعاعي لدارة C,L,R تفرعية

أ- $\varphi > 0 \Leftarrow B > 0$ التيار متقدم Leading

ب- $\varphi < 0 \Leftarrow B < 0$ التيار متأخر Lagging

ج- $\varphi = 0 \Leftarrow B = 0$ حالة أومية

مسألة (٣-١):

لدينا الدارة الكهربائية المبينة في الشكل (٣-١٤) وذات المحددات التالية:

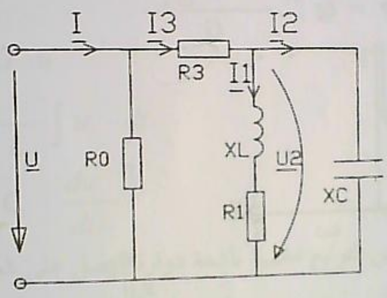
$$R_0 = 39\,[\Omega],\ R_1 = 7[\Omega],\ R_3 = 4{,}5[\Omega]$$

$$X_L = 24\,[\Omega],\ X_C = 44\,[\Omega],\ \underline{U}_2 = 220\ [V]$$

والمطلوب: أ- حساب قيم جميع التيارات والتوتر $\underline{U}$

ب- رسم المخطط الشعاعي للتيارات والتوترات.**[6]**

الحل:



الشكل (٣-١٤)

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_1} = \frac{220}{7 + j24} = 2{,}46 - j8{,}45$$

$$= 8{,}8 \cdot e^{-j73^\circ 46'}\,[A]$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{220}{-j44} = j5$$

$$= 5 \cdot e^{j90}\,[A]$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 2{,}46 - j8{,}45 + j5$$

$$= 2{,}56 - j3{,}45$$

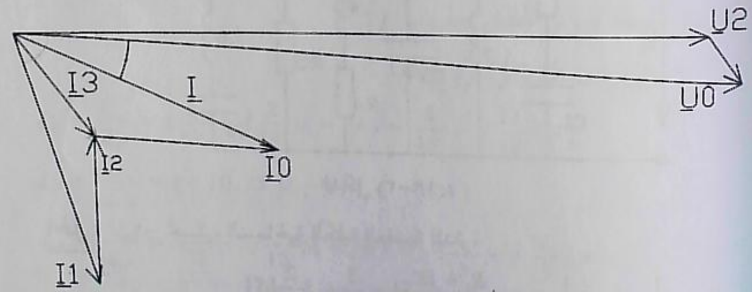
$$= 4{,}24\,.e^{-j54{,}5^\circ}\,[A]$$

$$\underline{U_3} = \underline{I_3}.\underline{Z_3} = 4,5 .4,24 .e^{-j54,5}$$
$$= 19,08 .e^{-j54,5} [V]$$
$$\underline{U_0} = \underline{U_2} + \underline{U_3} = 220 + 11,07 - j15,53$$
$$= 231,07 - j15,53$$
$$= 231,6 .e^{-j3^\circ 50'} [V]$$
$$\underline{I_o} = \frac{\underline{U_o}}{\underline{R_o}} = \frac{231,6 . e^{-j3^\circ 50'}}{39} = 5,94\ e^{-j3^\circ 50'}$$
$$= 5,93 - j0,4 [A]$$
$$I = \underline{I_o} + I_3 = 5,93 - j0,4 + 2,46 - j3,45 = 8,4 - j3,85$$
$$= 9,2\ e^{-j24^\circ 40'} [A]$$
$$\underline{U} = \underline{U_o} = 231,6\ e^{-j3^\circ 50'} [V]$$

زاوية فرق الصفحة

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -3^\circ 50' - (-24^\circ 40') \approx 21^\circ$$

التوتر يتقدم على التيار بزاوية $\varphi = 21^\circ$ والدارة ذات طبيعة تحريضية.



الشكل (٣-١٥) المخطط الشعاعي

مسألة (٣-٢):

لدينا الدارة الكهربائية المبينة على الشكل (٣-١٦) وفيها العناصر التالية:

$R_1 = 3[\Omega], X_{c1} = 2[\Omega], X_{L2} = 4[\Omega]$

$X_{c3} = 4[\Omega], R_4 = 3[\Omega], X_{L4} = 2[\Omega]$

$R_5 = 5[\Omega], R_6 = 7[\Omega], X_{L6} = 2[\Omega], X_{C6} = 2[\Omega]$

والمطلوب حساب:

١- السماحية الكلية للدارة.

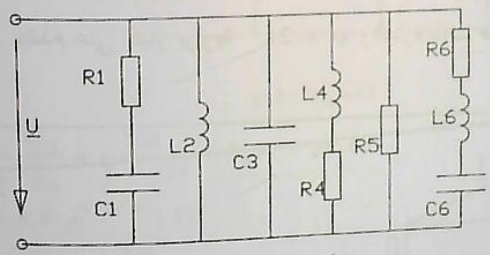
٢- التوتر المطبق على طرفي الدارة. **[6]**

٣- القيم الفعالة للتيارات المارة في فروع الدارة.

٤- زاوية فرق الصفحة بين التيار والتوتر.

٥- رسم المخطط الشعاعي للدارة .

وذلك عندما يكون التيار $\underline{I}_3 = 1[A]$



الشكل (٣-١٦)

__الحل:__ ١- نحسب السماحية الكلية العقدية للدارة

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1 - jX_{C1}} = \frac{R_1 + jX_{C1}}{R_1^2 + X_{C1}^2} = \frac{3}{13} + j\frac{2}{13}[S]$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{jX_{L2}} = -j0,25[S]$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{-jX_{C3}} = j0,25[S]$$

$$\underline{Y}_4 = \frac{1}{\underline{Z}_4} = \frac{1}{R_4 + jX_{L4}} = \frac{R_4 - jX_{L4}}{R_4^2 + X_{L4}^2} = \frac{3}{13} - j\frac{2}{12}[S]$$

$$\underline{Y}_6 = \frac{1}{\underline{Z}_6} = \frac{1}{R_6 + j(X_{L6} - X_{C6})} = \frac{1}{7 + j(2-2)} = \frac{1}{7}[S]$$

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6$$

$$\underline{Y}_{eq} = 0,8[S]$$

السماحية الكلية تحتوي فقط على قسم حقيقي، وبالتالي الدارة ذات طبيعة أومية.

٢- التوتر على طرفي الدارة هو التوتر على طرفي كل فرع من فروع الدارة وذلك لأن كافة الفروع موصلة مع بعضها على التفرع.

$$\underline{U} = \underline{U}_3 = \underline{I}_3 . \underline{Z}_3$$

$$\underline{U}_3 = 1.(-j4) = -j4 = 4.e^{-j\frac{\pi}{2}}[V]$$

القيمة الفعالة للتوتر المطبق $U = 4[V]$

٢-التيارات المارة في فروع الدارة

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = (\frac{3}{13} + j\frac{2}{13}).(-j4) = \frac{8}{13} - j\frac{12}{13}[A]$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = (-j0,25).(-j4) = -1[A]$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_4} = (\frac{3}{13} - j\frac{2}{12}).(-j4) = -\frac{8}{13} - j\frac{12}{13}[A]$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_5} = \frac{1}{5}.(-j4) = -j\frac{4}{5}[A]$$

$$\underline{I}_6 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_6} = \frac{1}{7}.(-j4) = -j\frac{4}{7}[A]$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 + \underline{I}_5 + \underline{I}_6$$

$$\underline{I} = -j3,2 = 3,2\, e^{-j\pi/2}[A]$$

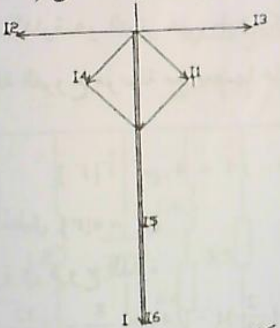
القيمة الفعالة للتيار الكلي

$$I = 3,2[A]$$

٤- زاوية فرق الصفحة بين التيار والتوتر

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$$

٥- المخطط الشعاعي: كما هو مبين في الشكل (٣-١٧).



الشكل (٣-١٧) المخطط الشعاعي

٣-٤ : الاستطاعة الكهربائية في دارات التيار المتناوب الأحادي:

Electrical Power In AC Circuits

٣-٤-١ :مفهوم الاستطاعة في دارات التيار المتناوب:[7]

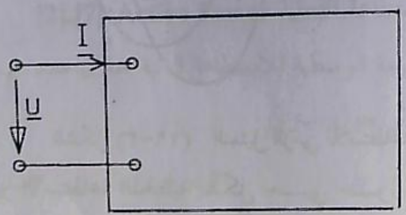
عندما نغذي دارة ثنائي أقطاب غير فعال بتوتر جيبي متناوب

$$u = U_m . \sin . (\omega t + \varphi) \quad (3,80)$$

يصبح التيار المار:

$$i = I_m . \sin . \omega t \quad (3,81)$$

وبالتالي يمكن أن نميز في هذه الحالة أربع تعريفات للاستطاعة التي يقدمها المولد إلى ثنائي الأقطاب غير الفعال.



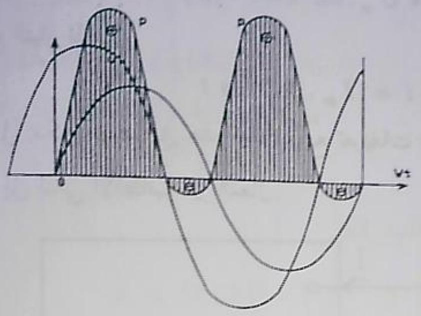
الشكل (٣-١٨) ثنائي أقطاب غير فعال

٣-٤-٢: الاستطاعة اللحظية Instantaneous Power:[2],[7]

$$p = u \cdot i \quad (3,82)$$

$$p = U_m . \sin . (\omega t + \varphi) . I_m . \sin(\omega . t)$$
$$p = U . I . \cos(\varphi) - U . I . \cos(2 . \omega . t + \varphi) \quad (3,83)$$

وهي كمية فيزيائية متناوبة لها مركبتان : الأولى ثابتة والثانية تابعة للزمن ويتغير بضعف تردد كل من التيار والتوتر المطبق على مأخذي ثنائي الأقطاب. نلاحظ من التمثيل البياني المبين على الشكل (٣-١٩) أن الاستطاعة موجبة في المجال $(0 \div \pi-\varphi)$ وسالبة في المجال $(\pi-\varphi \div \pi)$.



الشكل (٣-١٩) التمثيل الزمني للاستطاعة

تتغير الاستطاعة اللحظية بشكل جيبي حول القيمة الثابتة (المتوسطة) $U.I.\cos\varphi$ وطويلتها مساوية $U.I$.

كما نلاحظ أن القيمة العظمى الأولى تحصل عندما تكون:

$$\omega.t = \frac{\pi - \varphi}{2} \qquad (3,84)$$

وقيمتها:

$$P_{max} = U.I.\cos\varphi + U.I \qquad (3,85)$$

كما نلاحظ أن القيمة الصغرى تحصل عندما تكون:

$$\varphi\ t = \frac{\varphi}{2} \qquad (3,86)$$

وقيمتها:

$$P_{max} = U.I.\cos\varphi - U.I \qquad (3,87)$$

المساحة المحصورة بين منحني الاستطاعة اللحظية ومحور السينات هي عبارة عن الطاقة الكهربائية التي يستجرها المستهلك خلال فترة زمنية t .

$$A_t = \int_0^t p.dt \qquad (3,88)$$

$$= t.U.I.\cos\varphi - U.I.\frac{t}{2.\omega}[\sin(2.\omega.t + \varphi) - \sin\varphi$$

من هذه العلاقة الأخيرة يمكن أن نعرف ما يسمى الاستطاعة الفعلية أو الاستطاعة الحقيقية.

٣-٤-٣: الاستطاعة الفعلية Active Power [2],[7]:

وهي القيمة الوسطية للاستطاعة الآنية خلال عدد صحيح من الدورات وتمثل أثر جول-ليتز

$$P = \frac{1}{t}.\int_0^t u.i.dt \qquad t = n.T$$

$$= \frac{1}{n.T}\int_0^{nT}[.U.I\cos\varphi - U.I.\cos(2.\omega.t + \varphi].dt \qquad (3,89)$$

عندما يكون $t = n.T$ فإن الحد الثاني يساوي الصفر وبالتالي فإن علاقة الاستطاعة الفعلية هي التالية:

$$P = U.I.\cos\varphi \qquad (3,90)$$

وتقاس بالوات [W] وهي جداء القيمة الفعالة للتوتر بالقيمة الفعالة للتيار، وجيب تمام الزاوية المتشكلة بينهما، الذي يسمى عامل الاستطاعة Power Factor $\cos\varphi$.

من العلاقة الأخيرة نلاحظ أن قيمة الاستطاعة الفعلية تتعلق بقيمة عامل الاستطاعة (كلما كانت الزاوية صغيرة كانت قيمة عامل

الاستطاعة كبيرة وقريبة من الواحد ، وبالتالي كانت قيمة الاستطاعة الفعلية أكبر مايمكن).

في دارات ثنائيات الأقطاب التسلسلية (R,C أو R,L) نلاحظ، من مثلث التوترات (جداول الحالات الخاصة الموجودة في الفصل الثاني) ، أن

$$U.\cos\varphi = I.R$$

وبالتالي فإن قيمة الاستطاعة الفعلية

$$P = I^2 \cdot R \qquad (3,91)$$

وكذلك في دارات ثنائيات الأقطاب التفرعية (R,C أو R,L) نلاحظ، من مثلث التيارات (جداول الحالات الخاصة الموجودة في الفصل الثاني) ، أن

$$I.\cos\varphi = G.U$$

وبالتالي فإن قيمة الاستطاعة الفعلية

$$P = U^2 \cdot G \qquad (3,92)$$

قيمة الاستطاعة الفعلية دائماً موجبة ، أو مساوية الصفر عندما لا توجد في الدارة عناصر أومية.

$$P = U.I.\cos\varphi = I^2.R = U^2.G \qquad (3,93)$$

٣-٤-٤ : الاستطاعة الردية Reactive Power:[2],[7]

هي القدرة الكهربائية التي يتم اختزالها في ثنائي الأقطاب غير الفعال في وحدة الزمن، ثم يعاد توريدها إلى المنبع مرة أخرى. وهي جداء

القيمة الفعالة لتوتر بالقيمة الفعالة للتيار وجيب الزاوية المتشكلة بينـــهما . $\sin\varphi$

$$Q = U.I.\sin\varphi \qquad (3,94)$$

وتقاس بواحدة [VAR] .

نلاحظ أن هذه الاستطاعة تكون موجبة في الدارات ذات الطبيعة التحريضية، بينما تكون سالبة في الدارات ذات الطبيعة السعوية، وكذلك تكون قيمتها مساوية الصفر في الدارات ذات الطبيعة الأومية.

في دارات ثنائيات الأقطاب التسلسلية (R,C أو R,L) نلاحظ، مـــن مثلث التوترات (جداول الحالات الخاصة الموجودة في الفصل الثاني) ، أن

$$U.\sin\varphi = I.X$$

وبالتالي فإن قيمة الاستطاع الردية

$$Q = I^2 \cdot X \qquad (3,95)$$

وكذلك في دارات ثنائيات الأقطـــاب التفرعيـــة (R,C أو R,L) نلاحظ، من مثلث التيارات (جداول الحالات الخاصة الموجودة في الفصل الثاني) ، أن

$$I.\sin\varphi = -B.U$$

وبالتالي فإن قيمة الاستطاعة الردية

$$Q = -U^2 \cdot B \qquad (3,96)$$

أي يمكن أن نعبر عن الاستطاعة الردية بالأشكال الثلاثة التالية:

$$Q = U.I\sin\varphi = I^2.X = -U^2.B \qquad (3,97)$$

٣-٤-٥: الاستطاعة الظاهرية Apparent Power [2],[7]:

تملك الأجهزة الكهربائية قيماً أسمية محددة للتوتر والتيار مرتبطة بتحمل العوازل والقيم المسموح بها للتيارات المارة في النواقل من وجهة نظر التسخين، والظواهر الديناميكية الناتجة عنها، لذلك فإن الأجهزة الكهربائية لا يمكن أن نصفها بقيم الاستطاعة الفعلية المتعلقة بعامل الاستطاعة بل بجداء القيمة الفعالة للتوتر بالقيمة الفعالة للتيار، التي تسمى الاستطاعة الظاهرية.

هذه الاستطاعة ليس لها معنىً فيزيائي ، إنما هي قيمة حسابية وتمثل أكبر قيمة للاستطاعة الفعلية وتقاس بواحدة [VA].

$$S = U . I \tag{3,98}$$

في دارات ثنائيات الأقطاب التسلسلية (R,C أو R,L) نلاحظ، من مثلث التوترات (جداول الحالات الخاصة الموجودة في الفصل الثاني) ، أن

$$U = I . Z$$

وبالتالي فإن قيمة الاستطاعة الظاهرية

$$S = I^2 \cdot Z \tag{3,99}$$

وكذلك في دارات ثنائيات الأقطاب التفرعية (R,C أو R,L) نلاحظ، من مثلث التيارات (جداول الحالات الخاصة الموجودة في الفصل الثاني) ، أن

$$I = Y . U$$

وبالتالي فإن قيمة الاستطاعة الردية

$$S = U^2 . Y \qquad (3,100)$$

أي يمكن أن نعبر عن الاستطاعة الظاهرية بالأشكال الثلاثة التالية:

$$S = U.I = I^2.Z = U^2.Y \qquad (3,101)$$

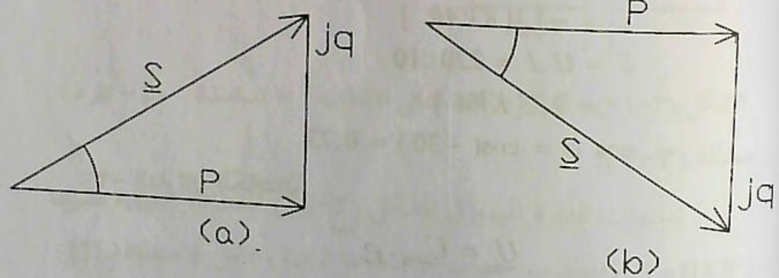
بعد معرفة أشكال الاستطاعة الكهربائية يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} P &= U.I\cos\varphi \\ Q &= U.I\sin\varphi \\ S &= U.I \\ \underline{S} &= P + jQ \end{aligned} \qquad (3,102)$$

من هذه العلاقات يمكن أن نرسم مثلـث الاسـتطاعات Power Triangle لأية دراة كهربائية كما في الشكل (٣-٢٠) ومنه نلاحظ أن:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad (3,103)$$

$$tg\varphi = \frac{Q}{P} \qquad (3,104)$$



الشكل (٣-٢٠) مثلث الاستطاعات

أ- تحريضية ب - سعوية

مسألة (٣-٣):

ثنائي أقطاب غير فعال مطبق عليه بتوتر جيبي ومتناوب قيمته الفعالة $U = 220[V]$ بتردد $f = 50[HZ]$ ويمر فيه تيار قيمته الفعالة $I = 10[A]$ ويسبق التوتر بزاوية 30^O والمطلوب:

١- حساب الاستطاعة الفعلية والردية والظاهرية وعامل الاستطاعة.

٢- ارسم الدارة المكافئة لثنائي الأقطاب باعتبارها دارة تسلسلية، ثم باعتبارها دارة تفرعية، واحسب قيم عناصر الدارتين. **[3]**

الحل: ١-

$$P = U.I\cos\varphi = 220\ .10\ .\cos(-30)$$
$$= 1{,}905\ [KW]$$
$$Q = U.I\sin\varphi = 220\ .10\ .\sin(-30)$$
$$= -1{,}1[KVAR]$$
$$S = U.I = 220\ .10$$
$$= 2{,}2[KVA]$$
$$\cos\varphi = \cos(-30) = 0{,}73$$

٢- الدارتان المكافئتان:

$$\underline{U} = \underline{U}_m \cdot e^{jwt}$$
$$\underline{I} = \underline{I}_m \cdot e^{jwt}$$

الدارة التسلسلية

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} \cdot e^{-j30} = 11(\sqrt{3} - j)[\Omega]$$

$$R_S = 11\sqrt{3} = 19{,}1[\Omega]$$

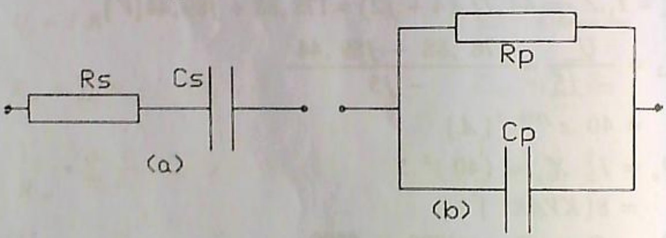
$$X_S = -11[\Omega]$$

الدارة التفرعية

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{10}{220} \cdot e^{j30} = \frac{1}{44}(\sqrt{3} + j)[S]$$

$$G_P = \sqrt{3}\,\frac{1}{44} = 25{,}4[S]$$

$$B_P = \frac{1}{44}[S] = \omega . c_p \Rightarrow C_p = 72[\mu F]$$



الشكل (٣-٢١) الدارة المكافئة لثنائي الأقطاب أ- تسلسلية ب - تفرعية

مسألة (٣-٤):

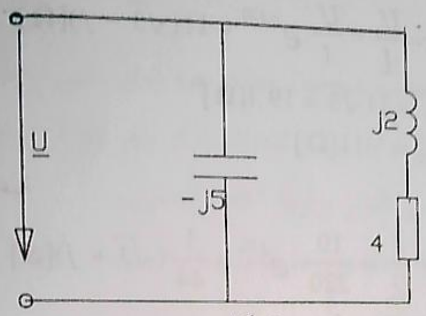
تستهلك الدارة المبينة في الشكل (٣-٢٢) استطاعة حقيقية قدرها $P = 8[KW]$ والمطلوب حساب الاستطاعة الردية وعامل الاستطاعة.**[3]**

الحل:

$$P = I_1^2 . R$$

$$I_1 = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{8000}{4}}$$

$$= 44{,}72\ [A]$$



الشكل (٣-٢٢)

$$Q_L = I_1^2 . X_L = (44,72)^2 . 2$$
$$= 4[KVAR]$$
$$\underline{U} = \underline{I_1} . \underline{Z_1} = 44,72 . (4 + j2) = 178,88 + j89,44 [V]$$
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{-j5} = \frac{178,88 + j89,44}{-j5}$$
$$= 40 . e^{j116,5} [A]$$
$$Q_c = I_2^2 . X_c = (40)^2 . 5$$
$$= 8[KVAR]$$
$$Q = Q_L - Q_c = 4000 - 8000$$
$$= -4[KVAR]$$
$$tg\,\varphi = \frac{Q}{P} \Rightarrow \cos\varphi = \cos(tg^{-1}\frac{Q}{P}) = 0,894$$

٣-٥: تعميم طرق حساب دارات التيار المستمر على دارات التيار المتناوب:

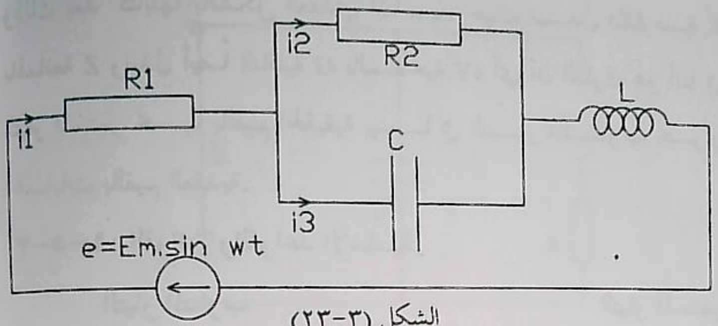
يمكن تعميم جميع القواعد الأساسية، والقوانين المتعلقة بالتيار المستمر التي تمت دراستها في الفصل السابق على دارات التيار المتناوب،

وذلك بعد كتابتها بالشكل العقدي المناسب، حيث نبدل المقاومة R بالممانعة Z ونبدل أيضاً الناقلية G بالسماحية Y، أي أن الفارق هو أننا في التيار المستمر نحسب بالقيم الحقيقية بينما في التيار المتناوب نجري الحسابات بالقيم العقدية.

٣-٥-١: القوانين والقواعد الأساسية:

التيار المتناوب	التيار المستمر
$\sum \underline{i}_{in} = \sum \underline{i}_{out}$	$\sum I_{in} = \sum I_{out}$
$\sum \underline{U} = \sum \underline{E}$	$\sum U = \sum E$
$\underline{U} = \underline{I}.\underline{Z}$	$U = I.R$
$\underline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Z}_i$	$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$
$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_i}$	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$
$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$	$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$
$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$	$\frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

٣-٥-٢: طريقة حل دارات التيار المتناوب بمساعدة قانوني كيرشوف:[7],[8],[9]



الشكل (٣-٢٣)

١- نحول الدارة إلى الشكل العقدي بإجراء التبديلات التالية:

$$e \rightarrow \underline{e} \rightarrow \underline{E}$$

$$i \rightarrow \underline{i} \rightarrow \underline{I}$$

$$L \rightarrow j\omega.L$$

$$C \rightarrow \frac{1}{j\omega.c}$$

٢- نحدد التيارات المارة في الدارة وهي i_1, i_2, i_3 وبالتالي يلزمنا ثــلاث معادلات بثلاثة مجاهيل.

من قانون كيرشوف الأول

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \qquad (3,105)$$

من قانون كيرشوف الثاني على الحلقة الأولى

$$\underline{I}_2.R_2 - \underline{I}_3.\frac{1}{j\omega.c} = 0 \qquad (3,106)$$

من قانون كيرشوف الثاني على الحلقة الثانية

$$\underline{I}_1.R_1 + \underline{I}_2.R_2 - \underline{I}_1.j\omega.L = \underline{E} \qquad (3,107)$$

من المعادلة (3,106) يكون

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_2 . R_2 . j\omega . c \qquad (3,108)$$

نعوضها في المعادلة (3,105) يكون

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_2 . R_2 . j\omega . c \qquad (3,109)$$

نعوض في المعادلة (3,107) فيكون

$$(R_1 + j\omega.L).(\underline{I}_2 + \underline{I}_2 R_2 j\omega.c) + \underline{I}_2 R_2 \qquad (3,110)$$

$$\underline{I_2} = \frac{\underline{E}}{R_1 + R_2 - \omega^2 . L.C.R_2 + j(\omega.L + \omega.cR_1 R_2)} = \frac{\underline{E}}{A + jB} \qquad (3,111)$$

حيث:

$$A = R_1 + R_2 + \omega^2 . L.C.R_2$$
$$B = \omega (L + C.R_1 . R_2) \qquad (3,112)$$
$$\varphi = tg^{-1} \frac{B}{A}$$

نعوض قيمة $\underline{I_2}$ في العلاقة (3,108) فنحصل على $\underline{I}_3$ وفي العلاقة (3,109) فنحصل على التيار $\underline{I}_1$.

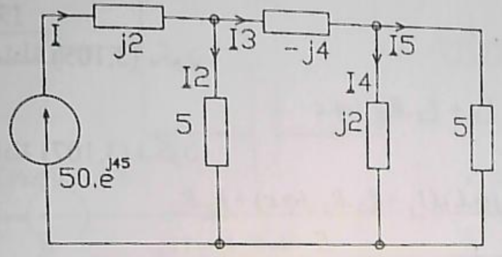
مسألة (٣-٥):

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٣-٢٤) والمطلوب: حساب التيارات المارة في فروع الدارة باستخدام قانوني كيرشوف **[8]**

الحل:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_4 + \underline{I}_5 \qquad (1)$$
$$\underline{I} = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \qquad (2)$$
$$5.\underline{I_5} - j2.\underline{I_4} = 0 \qquad (3)$$
$$j2.\underline{I_4} - j4\underline{I_3} - 5\underline{I_2} = 0 \qquad (4)$$

$$50..e^{j45} = j2.\underline{I} + 5\underline{I_2} = 0 \qquad (5)$$



الشكل (٣-٢٤)

من العلاقة(3) نجد

$$\underline{I_5} = j\frac{2}{5}.\underline{I_4} \qquad (6)$$

نعوض في العلاقة (1) فيكون

$$\underline{I_3} = \underline{I_4} + 0,4\underline{I_4} = (1 + J0,4)\underline{I_4} \qquad (7)$$

ومن العلاقة (4) نجد

$$\underline{I_4} = \frac{5.\underline{I_2} + jo,4\underline{I_3}}{j2} = -j2,5\underline{I_2} + 2\underline{I_3} \qquad (8)$$

نعوض في العلاقة (7) فيكون

$$\underline{I_3} = (1 + J0,4).(-j2,5\underline{I_2} + 2\underline{I_3})$$
$$= -j2,5\underline{I_2} + \underline{I_2} + 2I_3 + 0,8\underline{I_3}$$
$$= (1 - j2,5)\underline{I_2} + 2,8\underline{I_3}$$
$$\Rightarrow -1,8\,\underline{I_3} = (1 - j2,5)\,\underline{I_2} \qquad (9)$$

نعوض في (5) فيكون

$$50.e^{j45} = j2(\underline{I_2} + \underline{I_3}) + 5\underline{I_2}$$

$$50.e^{j45} = j2(\underline{I_2} - \frac{1 - j2,5}{1,8}\underline{I_2}) + 5.\underline{I_2}$$

$$= (2,2 + j1).\underline{I_2}$$

$$\underline{I_2} = \frac{50.e^{j45}}{2,2 + j1} = 19,5 + j7,3$$

$$= 20,8.e^{j20,6}[A]$$

نعوض في (9)

$$\underline{I_3} = -\frac{1 - j2,5}{1,8}.\underline{I_2}$$

$$= -20,8 + j22,89[A]$$

نعوض في (7)

$$\underline{I_4} = \frac{\underline{I_3}}{1 + j0,4} = \frac{-20,8 + j22,89}{1 + j0,4}$$

$$= -10,04 + j26,9[A]$$

نعوض في (6)

$$\underline{I_5} = j0,4(-10,04 + j26,9)$$

$$= -10,79 - j4,016\ [A]$$

نعوض في (2)

$$\underline{I} = (19,5 - j7,3) + (-20,8 + j22,89)$$

$$= -1,3 + j30,19[A]$$

٣-٥-٣: طريقة حل دارات التيار المتناوب بمساعدة تيارات الحلقات [7],[8],[9]:

إذا كان لدينا دارة مبينة في الشكل(٣-٢٥) وأردنا أن نحسب التيارات المارة في الخطوط وفق هذه الطريقة ، يجب أولاً أن نحسب عدد الحلقات المستقلة، ثم نختار تياراً وهمياً في كل حلقة مستقلة.

$$B = L - N + 1 \qquad (3,114)$$

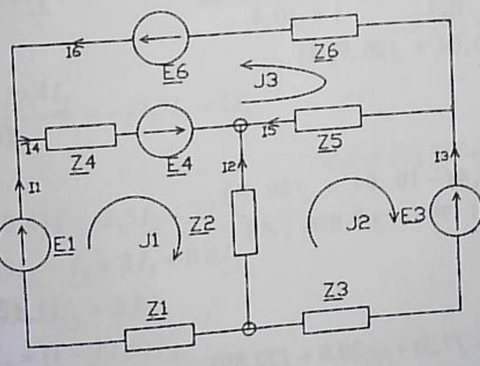
حيث:

B – عدد الحلقات المستقلة.

L- عدد الخطوط في الدارة.

N – عدد العقد .

ففي هذه الدارة $N = 4$, $L = 6$ وبالتالي عدد الحلقات المستقلة $B = 3$.



الشكل (٣-٢٥)

نختار J_1, J_2, J_3 في الحلقات المستقلة وحسب جملة المعادلات الأساسية

$$\begin{aligned} \underline{E}_{11} &= \underline{Z}_{11} \cdot \underline{J}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{J}_2 + \underline{Z}_{13} \cdot \underline{J}_3 \\ \underline{E}_{22} &= \underline{Z}_{21} \cdot \underline{J}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{J}_2 + \underline{Z}_{23} \cdot \underline{J}_3 \\ \underline{E}_{33} &= \underline{Z}_{31} \cdot \underline{J}_1 + \underline{Z}_{32} \cdot \underline{J}_2 + \underline{Z}_{33} \cdot \underline{J}_3 \end{aligned} \qquad (3,115)$$

حيث: الممانعات الذاتية

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 \\ \underline{Z}_{22} &= \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 \\ \underline{Z}_{33} &= \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 \end{aligned} \qquad (3,116)$$

والممانعات التبادلية

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_{13} &= \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_4 \\ \underline{Z}_{23} &= \underline{Z}_{32} = \underline{Z}_5 \end{aligned} \qquad (3,117)$$

وتوترات الحلقات

$$\begin{aligned} \underline{E}_{11} &= \underline{E}_1 + \underline{E}_4 \\ \underline{E}_{22} &= -\underline{E}_3 \\ \underline{E}_{33} &= \underline{E}_4 + \underline{E}_6 \end{aligned} \qquad (3,118)$$

وبالمقارنة بين التيارات الحقيقية في الخطوط والتيارات الوهمية نجد أن:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{J}_1 \\ \underline{I}_2 &= \underline{J}_2 - \underline{J}_3 \\ \underline{I}_3 &= -\underline{J}_2 \\ \underline{I}_4 &= \underline{J}_1 + \underline{J}_3 \\ \underline{I}_5 &= -\underline{J}_2 - \underline{J}_3 \\ \underline{I}_6 &= \underline{J}_3 \end{aligned} \qquad (3,119)$$

مسألة (٣-٦):

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٣-٢٦) وتحوي الأحمال التالية:

$$\underline{Z}_{AB}=10+j10[\Omega], \underline{Z}_{BG}=10[\Omega], \underline{Z}_{CH}=10[\Omega], \underline{Z}_{GE}=-j10[\Omega]$$

$$\underline{Z}_{HD}=j10[\Omega], \underline{Z}_{FE}=10+j10[\Omega], \underline{Z}_{GH}=10[\Omega], \underline{E}=100[V]$$

والمطلوب: ١- حساب التيارات المارة في فروع الدارة .

٢- رسم المخطط الشعاعي لكافة التيارات والتوترات. **[9]**

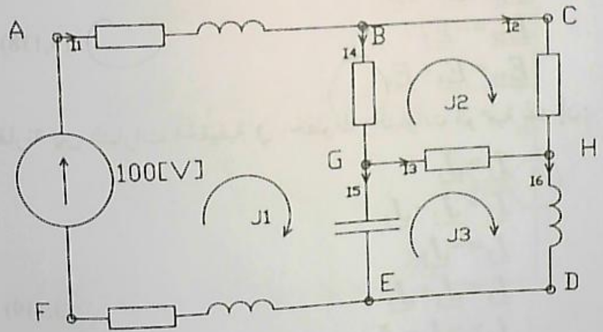
الحل:

يمكن حل هذه المسألة بمساعدة قانوني كيرشوف، أو باستخدام تيارات الحلقات، أو وفق طريقة الكمون العقدي.

أفضل طريقة هي طريقة تيارات الحلقات حيث:

$$B=L-N+1=3$$

يوجد ثلاث حلقات مستقلة.



الشكل (٣-٢٦)

الحلقة الأولى: $\underline{E} = (30 + j10).\underline{J}_1 - 10.\underline{J}_2 + j10.\underline{J}_3$

الحلقة الثانية: $0 = -10.\underline{J}_1 + 30.\underline{J}_2 - 10.\underline{J}_3$

الحلقة الثالثة: $0 = j10.\underline{J}_1 - 10.\underline{J}_2 + 10.\underline{J}_3$

$$\underline{J}_1 = \frac{\underline{D}_1}{\underline{D}} = \frac{\begin{vmatrix} 100 & -10 & j10 \\ 0 & 30 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30+j10 & -10 & j10 \\ -10 & 30 & -10 \\ j10 & -10 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{20000}{8000 + j4000}$$

$$= 2 - j1[A]$$

$$\underline{J}_2 = \frac{\underline{D}_2}{\underline{D}} = \frac{\begin{vmatrix} 30+j10 & 100 & j10 \\ -10 & 0 & -10 \\ j10 & 0 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30+j10 & -10 & j10 \\ -10 & 30 & -10 \\ j10 & -10 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{10000 - j10000}{8000 + j4000}$$

$$= 0{,}5 - j1{,}5[A]$$

$$\underline{J}_3 = \frac{\underline{D}_3}{\underline{D}} = \frac{\begin{vmatrix} 30+j10 & -10 & 100 \\ -10 & 30 & 0 \\ j10 & -10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30+j10 & -10 & j10 \\ -10 & 30 & -10 \\ j10 & -10 & 10 \end{vmatrix}}$$

$$= -0{,}5 - j3{,}5[A]$$

مقارنة التيارات الحقيقية مع التيارات الوهمية:

$\underline{I}_1 = \underline{J}_1 = 2 - j1[A]$

$\underline{I}_2 = \underline{J}_2 = 0,5 - j1,5[A]$

$\underline{I}_3 = \underline{J}_3 - \underline{J}_2 = -1 - j2[A]$

$\underline{I}_4 = \underline{J}_1 - \underline{J}_2 = 1,5 + j0,5[A]$

$\underline{I}_5 = -\underline{J}_1 - \underline{J}_3 = 2,5 + j2,5[A]$

$\underline{I}_6 = \underline{J}_3 = -0,5 - j3,5[A]$

التوترات:

$\underline{U}_{AB} = (10 + j10).\underline{I}_1 = 30 + j10[V]$

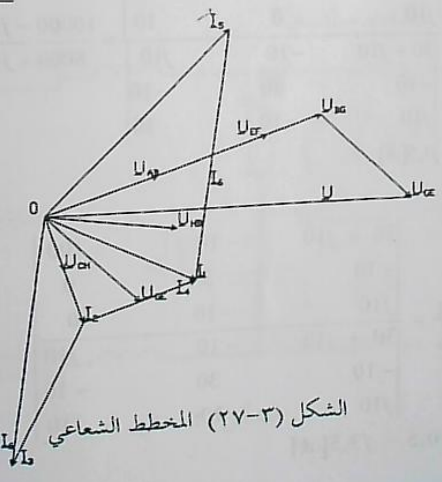
$\underline{U}_{EF} = 30 + j10[V]$

$\underline{U}_{BG} = 10.\underline{I}_4 = 15 + j15[V]$

$\underline{U}_{GE} = -j10.\underline{I}_5 = 25 - j25[V]$

$\underline{U}_{CH} = 10.\underline{I}_2 = 5 - j15[V]$

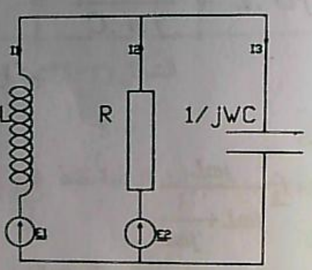
$\underline{U}_{HD} = j10.\underline{I}_6 = 35 - j5[V]$



الشكل (٣-٢٧) المخطط الشعاعي

٣-٥-٤: طريقة حل دارات التيار المتناوب بمساعدة مبدأ التراكم : [7],[8],[9]

ليكن لدينا الدارة المبينة في الشكل (٣-٢٨) ونريد أن نحسب التيار المار في المكثف C وذلك حسب مبدأ التراكم.



الشكل (٣-٢٨)

<u>مرحلة أولى:</u> نقصر $\underline{E}_2$ ونحسب التيارات الناتجة فقط $\underline{E}_1$ وتصبح الدارة على الشكل (٣-٢٩).

$$\underline{I}'_1 = \frac{\underline{E}_1}{j\omega, L + [R // \frac{1}{j\omega.C}]} \qquad (3,120)$$

$$\underline{I}'_3 = \underline{I}'_1 \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega.C}} \qquad (3,121)$$

<u>مرحلة ثانية:</u> نقصر $\underline{E}_1$ ونحسب التيارات الناتجة فقط $\underline{E}_2$ وتصبح الدارة على الشكل (٣-٣٠).

$$\underline{I}_2'' = \frac{\underline{E}_2}{R_2 + \left[j\omega .L \,//\, \frac{1}{j\omega .C} \right]} \qquad (3,122)$$

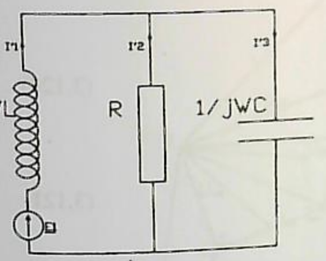
$$\underline{I}_3'' = \underline{I}_1'' \frac{j\omega .L}{j\omega .L + \frac{1}{j\omega .C}} \qquad (3,123)$$

مرحلة ثالثة: مرحلة التراكم:

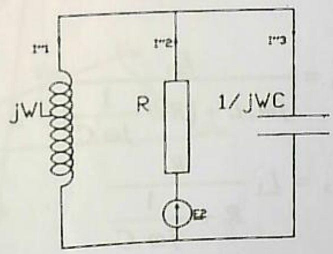
$$\underline{I}_3 = \underline{I}_3' + \underline{I}_3'' \qquad (3,124)$$

$$= \underline{I}_1' . \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega c}} + \underline{I}_2' \frac{j\omega L}{j\omega L + \frac{1}{j\omega c}}$$

$$= \frac{\underline{E}_1 .R}{j\omega L + [R // \frac{1}{j\omega c}]} . \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega c}} + \frac{\underline{E}_2 .j\omega L}{R_2 + [j\omega L // \frac{1}{j\omega c}]} . \frac{1}{j\omega l + \frac{1}{j\omega c}} \qquad (3,125)$$



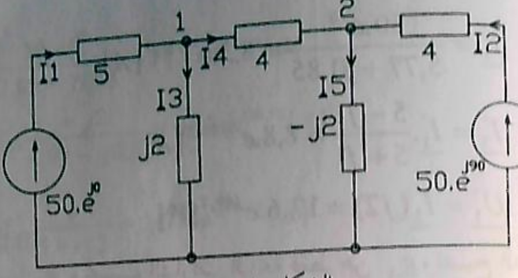
الشكل (٣-٢٩)



الشكل (٣-٣٠)

مسألة (٣-٧):

المطلوب حساب التوتر $\underline{U}_1$ باستخدام مبدأ التراكم.[7]



الشكل (٣-٣١)

الحل:

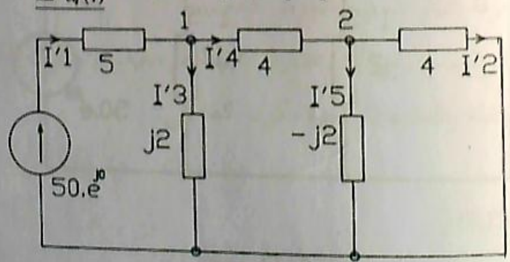
١- نقصر $\underline{E}_2$ ونحسب التيارات الناتجة فقط عن $\underline{E}_1$ وتصبح الدارة على الشكل (٣-٣٢).

$$\underline{Z}_1 = \frac{2.(-j2)}{2-j2} = 1 - j1[\Omega]$$

$$\underline{Z}_2 = 1 - j1 + 4 = 5 - j1[\Omega]$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{(5-j1).(j2)}{5-j1+j2} = 0{,}77 + j1{,}85[\Omega]$$

$$\underline{Z}_{eq(1)} = 5{,}77 + j1{,}85[\Omega]$$



الشكل (٣-٣٢)

$$\underline{I_1'} = \frac{50.e^{j0}}{5,77 + j1,85} = 8,3.e^{-j17,7}[A]$$

$$\underline{I_3'} = \underline{I_1'}.\frac{5 - j1}{5 + j1} = 8,8.e^{-j40,3}[A]$$

$$\underline{U_1'} = \underline{I_3'}(j2) = 17,6.e^{j49,7}[V]$$

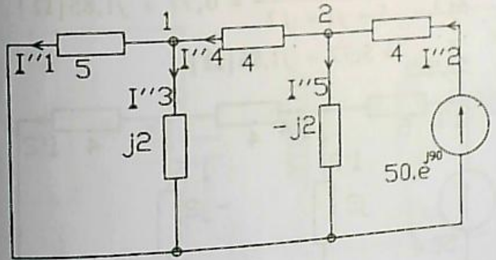
٢- نقصر $\underline{E}_1$ ونحسب التيارات الناتجة فقط عن $\underline{E}_2$ وتصبح الدارة على الشكل (٣-٣٣).

$$\underline{Z}_1 = \frac{5.(j2)}{5 + j2} = 0,9 + j1,7[\Omega]$$

$$\underline{Z}_2 = 4,69 + j1,7[\Omega]$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{(4,69 + j1,7).(-j2)}{4,69 + j1,7 - j2} = 0,85 - j1,95[\Omega]$$

$$\underline{Z}_{eq(2)} = 2,85 - j1,95[\Omega]$$



الشكل (٣-٣٣)

$$\underline{I}_2'' = \frac{50.e^{j90}}{2,85 - j1,95} = 14,5.e^{j124,4}[A]$$

$$\underline{I}_4'' = \underline{I}_2''.\frac{-j2}{4,69 - j0,3} = 6,17.e^{j38,05}[A]$$

$$\underline{I}_3'' = \underline{I}_4''.\frac{5}{5 + j2} = 5,73.e^{j16,25}[A]$$

$$\underline{U}_1'' = \underline{I}_3''(j2) = 11,46.e^{j106,25}[V]$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1' + \underline{U}_1'' = 25,75.e^{j72}[V]$$

٣-٥-٥: طريقة حل دارات التيار المتناوب بمساعدة كمونات العقد : [7],[8],[9]

توجد في الدارة المبينة في الشكل (٣-٣٤) ثلاث عقد رئيسة وعقدة مختارة كعقدة مرجعية References Node .

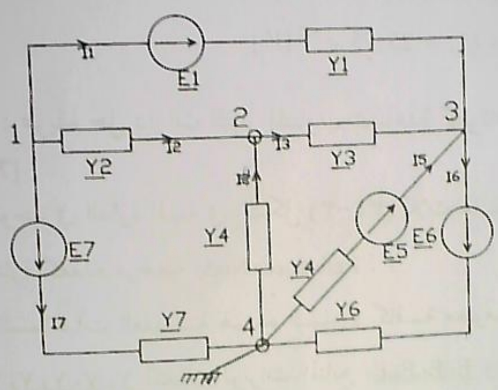
السماحيات العقدية لهذه الدارة كافة معلومة وهي $\underline{Y}_1,\underline{Y}_2,\underline{Y}_3,\underline{Y}_4,\underline{Y}_5,\underline{Y}_6,\underline{Y}_7$ كذلك توترات المنابع $\underline{E}_1,\underline{E}_5,\underline{E}_6,\underline{E}_7$ والمطلوب في هذه الدارة معرفة التيارات في الخطوط كافة.

بما أن العقدة رقم /٤/ مختارة كعقدة مرجعية، فإن فرق الكمون بين العقد المستقلة والعقدة المرجعية يكون كما يلي:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1' &= \underline{U}_1 - \underline{U}_4 \\ \underline{U}_2' &= \underline{U}_2 - \underline{U}_4 \\ \underline{U}_3' &= \underline{U}_3 - \underline{U}_4 \end{aligned} \qquad (3,126)$$

بينما فرق الكمون بين العقد المستقلة يكون على الشكل التالي:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}'_1 - \underline{U}'_4$$
$$\underline{U}_{13} = \underline{U}'_1 - \underline{U}'_3 \qquad (3,127)$$
$$\underline{U}_{23} = \underline{U}'_2 - \underline{U}'_3$$



الشكل (٣-٣٤)

بتطبيق قانون كيرشوف الأول على على العقد المستقلة نحصل على ما يلي:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_7 = 0 \qquad (3,128)$$
$$\underline{I}_2 + \underline{I}_4 = \underline{I}_3$$
$$\underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_5 = \underline{I}_6$$

وبتطبيق قانون أوم على فروع الدارة نحصل على قيم التيارات التالية:

$$
\begin{aligned}
&\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \cdot \underline{E}_1 + \underline{Y}_1 \cdot \left(\underline{U}'_1 - \underline{U}'_3\right) \\
&\underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \cdot \left(\underline{U}'_1 - \underline{U}'_2\right) \\
&\underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \cdot \left(\underline{U}'_2 - \underline{U}'_3\right) \\
&\underline{I}_4 = -\underline{Y}_4 \cdot \underline{U}'_2 \\
&\underline{I}_5 = \underline{Y}_5 \cdot \underline{E}_5 - \underline{Y}_5 \underline{U}'_3 \\
&\underline{I}_6 = \underline{Y}_6 \cdot \underline{E}_6 + \underline{Y}_6 \cdot \underline{U}'_3 \\
&\underline{I}_7 = \underline{Y}_7 \cdot \underline{E}_7 + \underline{Y}_7 \cdot \underline{U}'_1
\end{aligned}
\qquad (3,129)
$$

نعوض العلاقات الأخيرة بالعلاقات (3,128) وبترتيبها حسب $\underline{U}'_1, \underline{U}'_2, \underline{U}'_3$ يكون :

$$
\begin{aligned}
&-\underline{Y}_1 \cdot \underline{E}_1 - \underline{Y}_7 \cdot \underline{E}_7 = \left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_7\right)\underline{U}'_1 - \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}'_2 - \underline{Y}_1 \cdot \underline{U}'_3 \\
&0 = -\underline{Y}_2 \cdot \underline{U}'_1 + \left(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4\right)\underline{U}'_2 - \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}'_3 \\
&\underline{Y}_1 \cdot \underline{E}_1 + \underline{Y}_5 \cdot \underline{E}_5 - \underline{Y}_6 \cdot \underline{E}_6 = -\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}'_1 - \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}'_2 + \left(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4\right)\underline{U}'_3
\end{aligned}
\qquad (3,130)
$$

وبالشكل العام يمكن أن نكتب هذه العلاقات على الشكل التالي:

$$
\begin{aligned}
&\underline{I}'_1 = \left(\underline{Y}_{11}\right)\underline{U}'_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}'_2 + \underline{Y}_{13} \cdot \underline{U}'_3 \\
&\underline{I}'_2 = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}'_1 + \left(\underline{Y}_{22}\right)\underline{U}'_2 + \underline{Y}_{23} \cdot \underline{U}'_3 \\
&\underline{I}'_3 = \underline{Y}_{31} \cdot \underline{U}'_1 + \underline{Y}_{32} \cdot \underline{U}'_2 + \left(\underline{Y}_{33}\right)\underline{U}'_3
\end{aligned}
\qquad (3,131)
$$

حيث: السماحيات العقدية الذاتية

$$
\begin{aligned}
&\underline{Y}_{11} = \left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_7\right) \\
&\underline{Y}_{22} = \left(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4\right) \\
&\underline{Y}_{33} = \left(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4\right)
\end{aligned}
\qquad (3,132)
$$

السماحيات العقدية التبادلية

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_{2}$$
$$\underline{Y}_{13} = \underline{Y}_{31} = -\underline{Y}_{3} \qquad (3,133)$$
$$\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{32} = -\underline{Y}_{3}$$

تيارات المنابع المغذية للعقد

$$\underline{I}'_{1} = -\underline{Y}_{1}\cdot\underline{E}_{1} - \underline{Y}_{7}\cdot\underline{E}_{7}$$
$$\underline{I}'_{2} = 0 \qquad (3,134)$$
$$\underline{I}'_{3} = -\underline{Y}_{1}\cdot\underline{E}_{1} + \underline{Y}_{5}\cdot\underline{E}_{5} - \underline{Y}_{6}\cdot\underline{E}_{6}$$

السماحيات العقدية الذاتية دائماً موجبة بينما السماحيات العقدية التبادلية (وهي عبارة عن سماحيات الخطوط الواصلة بين العقد المذكورة بشكل مباشر) دائماً تؤخذ بإشارة سالبة.

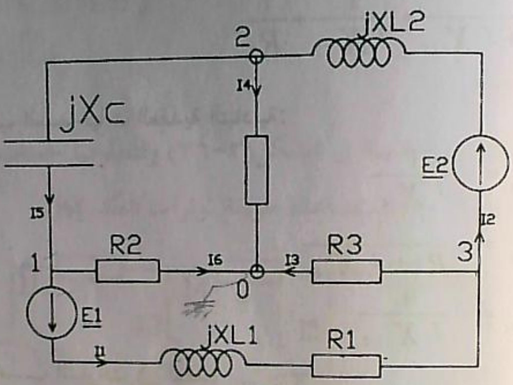
تيارات المنابع المغذية للعقد وهي عبارة عن مجموع جداءات السماحيات العقدية، وتوترات المنابع المتعلقة بالعقد المذكورة، وتؤخذ بإشارة موجبة إذا كان اتجاه E داخلاً للعقدة، وبإشارة سالبة إذا كان اتجاه E خارجاً من العقدة.

جملة المعادلات الأخيرة يمكن أن نكتبها بشكل مصفوفات كما يلي:

$$\begin{vmatrix} \underline{I}'_{1} \\ \underline{I}'_{2} \\ \underline{I}'_{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}'_{1} \\ \underline{U}'_{2} \\ \underline{U}'_{3} \end{vmatrix} \qquad (3,135)$$

مسألة (٣-٨):

لدينا الدارة الكهربائية المبينة في الـشكل (٣-٣٥)، والمطلـوب حساب قيم التيارات المارة في فروع الدارة باستخدام طريقـة تـوترات العقد.[9]



الشكل (٣-٣٥)

الحل:

نختار العقدة 0 كعقدة مرجعية وبالتالي:

$$B = L - N + 1$$

يوجد ثلاث عقد مستقلة

$$\begin{vmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{I}_2' \\ \underline{I}_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{U}_2' \\ \underline{U}_3' \end{vmatrix}$$

- نحسب السماحيات العقدية الذاتية:

$$\underline{Y}_{11}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1+JX_{L1}}+\frac{1}{JX_C}$$

$$\underline{Y}_{22}=\frac{1}{R_4}+\frac{1}{JX_C}+\frac{1}{JX_{L2}}$$

$$\underline{Y}_{33}=\frac{1}{R_1+JX_{L1}}+\frac{1}{JX_{L2}}+\frac{1}{R_3}$$

- نحسب السماحيات العقدية التبادلية:

$$\underline{Y}_{12}=\underline{Y}_{21}=-\frac{1}{JX_C}$$

$$\underline{Y}_{13}=\underline{Y}_{31}=-\frac{1}{R_1+JX_{L1}}$$

$$\underline{Y}_{23}=\underline{Y}_{32}=-\frac{1}{JX_{L2}}$$

- نحسب التيارات في العقد:

$$\underline{I}'_1=\frac{E_1}{R_1+JX_{L1}}$$

$$\underline{I}'_2=\frac{E_2}{JX_{L2}}$$

$$\underline{I}'_3=\frac{E_1}{R_1+JX_{L1}}-\frac{E_2}{JX_{L2}}$$

وبالتعويض في جملة المعادلات الأساسية وبمعرفة $\underline{U}'_1, \underline{U}'_2, \underline{U}'_3$ يمكن أن نحسب التيارات في الفروع من العلاقات التالية والناتجة من قانون أوم:

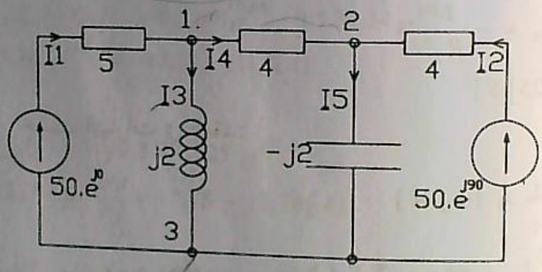
$$\underline{I}_1=\underline{Y}_1\cdot\underline{E}_1+\underline{Y}_1\cdot\left(\underline{U}'_1-\underline{U}'_3\right)$$

$$\underline{I}_2=\underline{Y}_2\cdot\underline{E}_2+\underline{Y}_2\cdot\left(\underline{U}'_3-\underline{U}'_2\right)$$

$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \cdot (\underline{U}'_3)$$
$$\underline{I}_4 = \underline{Y}_4 \cdot \underline{U}'_2$$
$$\underline{I}_5 = \underline{Y}_5 \cdot (\underline{U}'_2 - \underline{U}'_1)$$
$$\underline{I}_6 = \underline{Y}_6 \cdot \underline{U}'_1$$

مسألة (٣-٩):

لدينا الدارة المبينة في الشكل(٣-٣٦) والمطلوب حساب التوتر في العقدة /١/ و/٢/ وذلك بمساعدة طريقة توترات العقد.**[6]**



الشكل (٣-٣٦)

الحل:

نختار العقدة 3 كعقدة مرجعية وبالتالي:

$$P = N - 1 = 2$$

يوجد فقط عقدتان مستقلتان وبالتالي:

$$\underline{I}'_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}'_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}'_2$$
$$\underline{I}'_2 = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}'_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}'_2$$

- نحسب السماحيات الذاتية:

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jX_L} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{j2}$$

$$= 0,45 - j0,5[S]$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + j0,5$$

$$= 0,75 - j0,5[S]$$

- نحسب السماحيات التبادلية:

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\frac{1}{R_2}$$

$$= 0,25\,[S]$$

- نحسب التيارات في العقد:

$$\underline{I}_1' = \frac{E_1}{R_1} = 10\ [A]$$

$$\underline{I}_2' = \frac{E_2}{R_2} = 25\ .e^{j90}\ [A]$$

وبالتعويض يكون:

$$\begin{vmatrix} 10 \\ 25.e^{j90} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,45 - j0,5 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 + j0,5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{U}_2' \end{vmatrix}$$

$$\underline{U}_1' = \frac{D_1}{\underline{D}} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -0,25 \\ j25 & 0,75 + j0,5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,45 - j0,5 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 + j0,5 \end{vmatrix}}$$

$$= 24,725\,.e^{j72,3}[V]$$

$$\underline{U}_2^{\cdot} = \frac{\underline{D}_2}{\underline{D}} = \frac{\begin{vmatrix} 0,45 - j0,5 & 10 \\ -0,25 & j25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,45 - j0,5 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 + j0,5 \end{vmatrix}}$$

$$= 34,34 .e^{j52,8}[V]$$

التيارات في الخطوط

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1.\underline{E}_1 - \underline{Y}_1.\underline{U}_1^{\cdot} = 0,2.50 - 0,2.24,725\, e^{j72,3}$$
$$= 9,7.e^{-j29} = 8,5 - j4,7[A]$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_2.\underline{E}_2 - \underline{Y}_2.\underline{U}_2^{\cdot} = 0,5.50.e^{j90} - 0,5.34,34\, e^{j52,8}$$
$$= 15,36.e^{j132,5} = -10,38 + j11,3[A]$$

$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3.\underline{U}_1^{\cdot} = -j0,5.24,725\, e^{j72,3}$$
$$= 12,36.e^{-j17,7} = 11,78 - j3,76[A]$$

$$\underline{I}_4 = \underline{Y}_4(\underline{U}_1^{\cdot} - \underline{U}_2^{\cdot}) = 0,25.(24,725\, e^{j72,3} - 34,34\, e^{j52,8})$$
$$= 3,43.e^{j196} = -3,3 - j0,95[A]$$

$$\underline{I}_5 = \underline{Y}_5.\underline{U}_2^{\cdot} = j0,5.34,34\, e^{j52,8}$$
$$= 17,17.e^{j142,8} = -13,67 + j10,38[A]$$

مسألة (٣-١٠):

مولد كهربائي أحادي الطور ذو تردد $f = 50[HZ]$ وق.م.ك $e = 311\sqrt{2}\sin\omega t[V]$ كما في الشكل (٣-٣٧) وممانعته الداخلية $\underline{Z}_e = 1 + j1[\Omega]$ ويغذي الأحمال التالية:

$\underline{Z}_1 = 10 + j5[\Omega]$, $\underline{Z}_3 = 2 - j4[\Omega]$, $\underline{Z}_4 = 3 + j5[\Omega]$

عبر خط نقل واصل بين النقطتين a وb ممانعته $\underline{Z}_2 = 1 + j1[\Omega]$ ، والمطلوب:

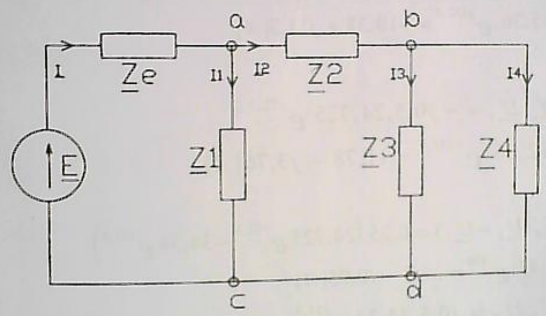
١- حساب التيارات المارة في فروع الدارة باستخدام الطريقة الأفضل

٢- ارسم المخطط الشعاعي لكافة التيارات والتوترات. **[14]**

الحل:

$$P = N - 1 = 2$$

$$B = L - N + 1 = 3$$



الشكل (٣-٣٧)

الطريقة الأفضل هي طريقة كمونات العقد لأنها بحاجة فقط لمعادلتين، بينما طريقة تيارات الحلقات بحاجة لثلاث معادلات.

نختار العقدة C عقدة مرجعية وبالتالي:

$$\underline{I}_a = \underline{Y}_{aa} . \underline{U}^{`}_a - \underline{Y}_{ab} . \underline{U}^{`}_b$$
$$\underline{I}_b = -\underline{Y}_{ba} . \underline{U}^{`}_a + \underline{Y}_{bb} . \underline{U}^{`}_b$$

السماحيات الذاتية:

$$\underline{Y}_{aa} = \underline{Y}_e + \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{1+j1} + \frac{1}{10+j5} + \frac{1}{1+j1}$$
$$= 1{,}505\, e^{-j43{,}6} [S]$$
$$\underline{Y}_{bb} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 = \frac{1}{1+j1} + \frac{1}{2-j4} + \frac{1}{3+j5}$$
$$= 0{,}82\, e^{-j33} [S]$$

السماحيات التبادلية:

$$\underline{Y}_{ab} = \underline{Y}_{ba} = \underline{Y}_2 = 0{,}707\ e^{-j45} [S]$$

التيارات في العقد المستقلة:

$$\underline{I}_a = \underline{Y}_e . \underline{E} = (0{,}5 - j0{,}5).(311\ .e^{j0})$$
$$= 220\ e^{j45} [A]$$
$$\underline{I}_b = 0 [A]$$

وبالتالي:

$$155{,}56 - j155{,}56 = (1{,}089 - j1{,}04) \underline{U}^{`}_a - (0{,}5 - j0{,}5) \underline{U}^{`}_b$$
$$0 = -(0{,}5 - j0{,}5) \underline{U}^{`}_a + (0{,}688 - j0{,}447) \underline{U}^{`}_b$$

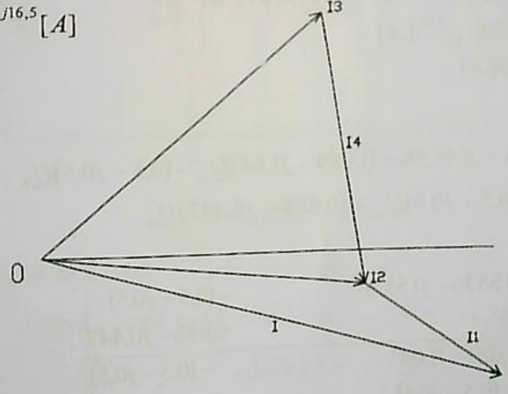
$$\underline{U}^{`}_a = \frac{\begin{vmatrix} 155{,}56 - j155{,}56 & -(0{,}5 - j0{,}5) \\ 0 & 0{,}688 - j0{,}447 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1{,}081 - j1{,}04 & -(0{,}5 - j0{,}5) \\ -(0{,}5 - j0{,}5) & 0{,}688 - j0{,}447 \end{vmatrix}}$$
$$= 240 . e^{-j10} [V]$$

$$\underline{U_b'} = \frac{\begin{vmatrix} 1{,}089 - j1{,}0 & 155{,}56 - j155{,}56 \\ -(0{,}5 - j0{,}5) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1{,}081 - j1{,}04 & -(0{,}5 - j0{,}5) \\ -(0{,}5 - j0{,}5) & 0{,}688 - j0{,}447 \end{vmatrix}}$$

$$= 207.e^{-j22}[V]$$

نحسب التيارات في الخطوط:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1.\underline{U}_a' = 21{,}4\, e^{-j36{,}5}[A]$$
$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_2.\underline{\underline{U}}_{ab} = 40{,}5.e^{-j6{,}2}[A]$$
$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3.\underline{U}_b' = 46{,}4.e^{j41{,}5}[A]$$
$$\underline{I}_4 = \underline{Y}_4.\underline{U}_b' = 35{,}45.e^{-j81}[A]$$
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$
$$= 21{,}4.e^{-j36{,}5} + 40{,}5.e^{-j6{,}2}$$
$$= 60\, e^{-j16{,}5}[A]$$



الشكل (٣-٣٨) المخطط الشعاعي

٣-٥-٦: طريقة مولد التوتر المكافيء لحل دارات التيار المتناوب :[7]
Thevenin's Theory

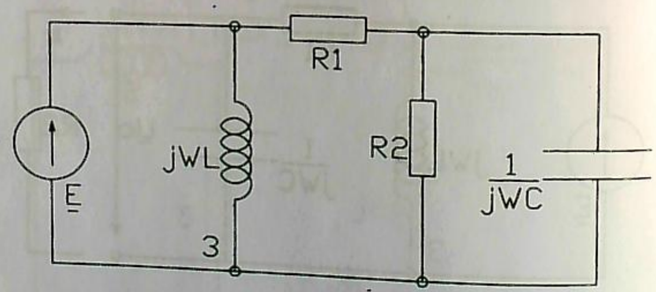
تعتمد هذه الطريقة على تقسيم الدارة إلى ثنائي أقطاب أحدهما فعال والآخر غير فعال، ثم حساب توتر اللاحمل والممانعة الداخلية لثنائي الأقطاب الفعال.

إذا أردنا أن نحسب التيار المار في المقاومة R_2 في الدارة المبينة في الشكل(٣-٣٩).

نفصل المقاومة R_2 ونعتبرها ثنائي أقطاب غير فعال، ونعتبر بقية الدارة ثنائي أقطاب فعال كما في الشكل (٣-٤٠).

التيار المار في المقاومة R_2 يحسب من العلاقة التالية:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_i + R_2} \qquad (3,136)$$



الشكل (٣-٣٩)

حيث: $\underline{U}_0$ توتر اللاحمل ويساوي

$$\underline{U}_0 = \underline{E}\frac{\frac{1}{j\omega.c}}{R_1 + \frac{1}{j\omega.c}} = \underline{E}.\frac{1}{1 + j\omega.c.R_1} \qquad (3,137)$$

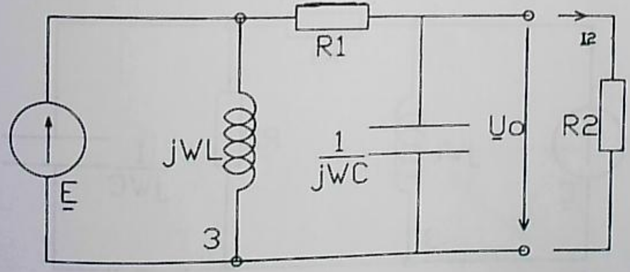
$\underline{Z}_i$ الممانعة الداخلية لثنائي الأقطاب الفعال وذلك بعد قصر المأخذين المطبق عليهما التوتر الكلي $\underline{E}$.

$$\underline{Z}_i = R_1 // \frac{1}{j\omega.c} = \frac{R_1}{1 + j\omega.cR_1} \qquad (3,138)$$

وبذلك يكون التيار المار في المقاومة R_2 هو:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}.\frac{1}{1 + j\omega cR_1}}{\frac{R_1}{1 + j\omega.cR_1} + R_2} \qquad (3,139)$$

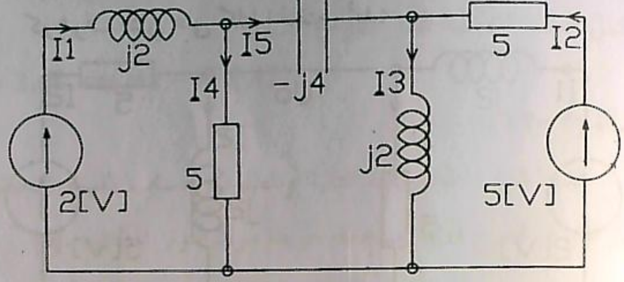
$$= \underline{E}.\frac{1}{R_2 + R_2.j\omega c.R_1 + R_1}$$



الشكل (٣-٤٠)

مسألة (٣-١١):

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٣-٤١) والمطلوب حساب قيمة التيار المار في السعة C وذلك باستخدام طريقة مولد التوتر المكافئ. **[6]**

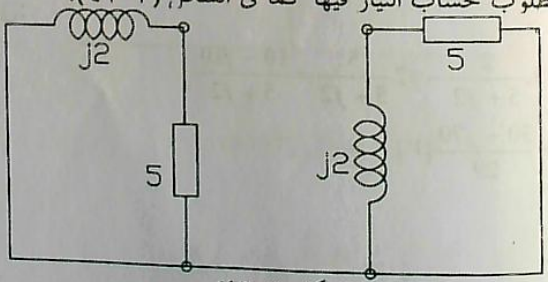


الشكل (٣-٤١)

الحل:

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_i + (-j4)}$$

- نحسب الممانعة الداخلية بعد قصر منابع التوتر وفصل الممانعة المطلوب حساب التيار فيها كما في الشكل (٣-٤٢).

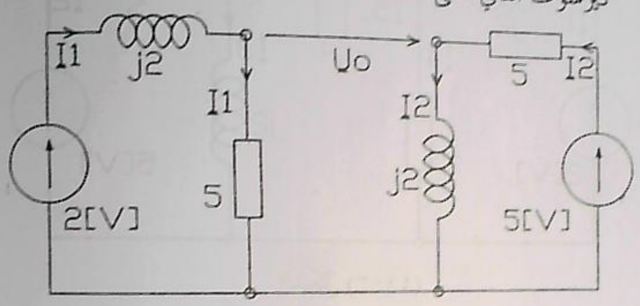


الشكل (٣-٤٢)

$$\underline{Z}_i = \frac{5.j2}{5+j2} + \frac{5.j2}{5+j2} = \frac{40+j100}{29}[\Omega]$$

$$\underline{U}_0 = 5.\underline{I}_1 - j2.\underline{I}_2$$

ـ نحسب توتر اللاحمل من الشكل (٣-٤٣) وحسب قانون كيرشوف الثاني على كلتا الحلقتين نجد:



الشكل (٣-٤٣)

$$2 = (5+j2).\underline{I}_1 \Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{2}{5+j2}[A]$$

$$5 = (5+j2).\underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{5}{5+j2}[A]$$

وبالتالي:

$$\underline{U}_0 = 5.\frac{2}{5+j2} - j2\frac{5}{5+j2} = \frac{10-j10}{5+j2}$$

$$= \frac{30-j70}{29}[V]$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\dfrac{30 - j70}{29}}{\dfrac{40 + j100}{29} - j4} = \frac{30 - j70}{40 - j16}$$

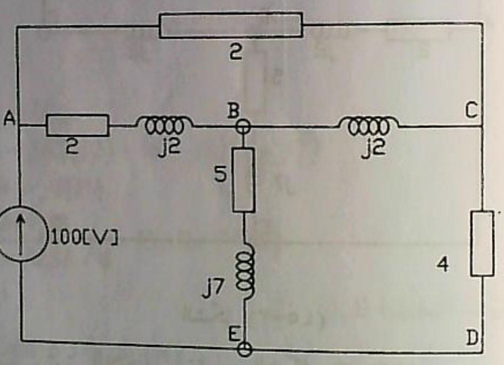
$$= 1,76 \cdot e^{-j45} [A]$$

وبالتالي القيمة اللحظية للتيار المار في السعة:

$$i_5 = 2,48 . \sin(\omega . t - 45) [A]$$

مسألة (٣-١٢):

لدينا الدارة الكهربائية التالية والمطلوب حساب القيمة اللحظيـــة للتيار المار في الفرع **CD** باستخدام طريقة مولد التوتر المكافىء .**[6]**



الشكل (٣-٤٤)

الحل:

$$\underline{I}_{cd} = \frac{\underline{U}_{cd}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_{cd}}$$

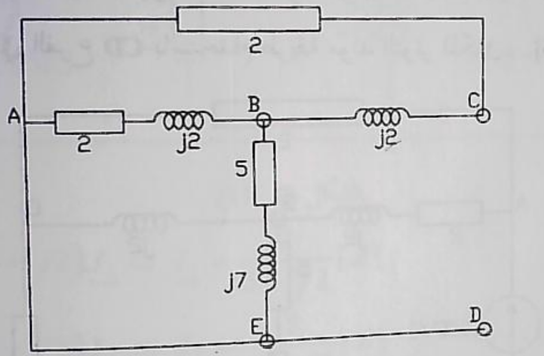
- نحسب الممانعة الداخلية $\underline{Z}_i$ بعد قصر منابع التوتر وفصل الممانعة المطلوب حساب التيار فيها كما في الشكل (٣-٤٥).

$$\underline{Z}_i = \left[\frac{(5+j7).(2+j2)}{(5+j7)+(2+j2)} + j2\right] // 2$$

$$= (1,445 + j1,72 + j2) // 2$$

$$= \frac{(1,445 + j1,72 + j2).2}{2 + 1,445 + j3,72 + 2}$$

$$= 1,463 + j0,579\ [\Omega]$$



الشكل (٣-٤٥)

- نحسب توتر اللاحمل $\underline{U}_{cd}$ من الشكل (٣-٤٦)

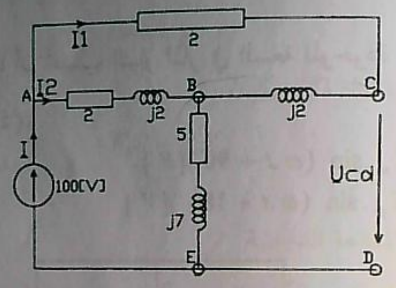
$$\underline{Z}_{eq} = \frac{(2+j2).(2+j2)}{4+j4} + 5 + j7$$

$$= 6 + j8[\Omega]$$

$$\underline{I} = \frac{100}{6+j8} = 6 - j8[A]$$

هذا التيار سوف يتوزع إلى تيارين وبالتساوي وبالتالي:

$$\underline{I}_1 = 3 - j4[A]$$
$$\underline{I}_2 = 3 - j4[A]$$



الشكل (٣-٤٦)

$$\underline{U}_{cd} = \underline{U}_{cb} + \underline{U}_{bd}$$
$$= (3 - j4).(j2) + (6 - j8).(5 + j7)$$
$$= 94 + j8[V]$$
$$\underline{I}_{cd} = \frac{94 + j8}{1{,}46 + j0{,}58 + 4} = 17{,}18.e^{-j1{,}2}[A]$$

وبالتالي القيمة اللحظية للتيار

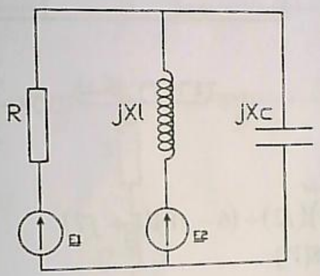
$$i_{cd} = 24{,}3.\sin(\omega t - 1{,}2)[A]$$

٣-٥-٧: طريقة مولد التيار المكافيء لحل دارات التيار المتناوب : [7]
Norton Theory

تعتمد هذه الطريقة على تقسيم الدارة إلى ثنائيي أقطاب أحـــدهما فعال والآخر غير فعال، ثم حساب تيار القصر والممانعة الداخلية لثنـــائي الأقطاب الفعال.

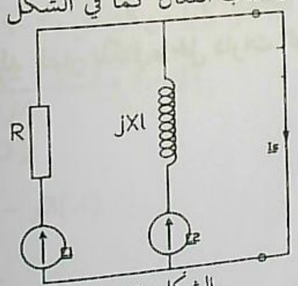
إذا أردنا أن نحسب التيار المار في السعة الموجودة في الدارة المبينة في الشكل(٣-٤٧).

$$e_1 = E_m . \sin\ (\omega .t + 90\ )[V\,]$$
$$e_2 = E_m . \sin\ (\omega .t + 180\ )[V\,] \qquad (3,140)$$



الشكل (٣-٤٧)

نفصل السعة ونعدها ثنائي أقطاب غير فعال ونـــضع دارة التيـــار المكافىء لبقية ثنائي الأقطاب الفعال كما في الشكل (٣-٤٨).



الشكل (٣-٤٨)

- حساب تيار القصر $\underline{I}_s$

نقصر المأخذين A و B ونحسب التيار المار فيهما

$$\begin{aligned} E_1 &= E.e^{j90}\ [V] \\ E_2 &= E.e^{j180}\ [V] \end{aligned} \qquad (3,141)$$

وحسب طريقة التراكم يكون

$$\underline{I}_s = \frac{jE}{R} - \frac{E}{jX_L} = \frac{-E.R - E.X_L}{jR.X_L} \qquad (3,142)$$

نحسب الممانعة الداخلية $\underline{Z}_i$

نقصر القوتين المحركتين الكهربائيتين ونحسب الممانعة التي تظهر على المأخذين A و B

$$\underline{Z}_i = R // jX_L = \frac{jR.X_L}{R + jX_L} \qquad (3,143)$$

نحسب التيار المار في السعة من العلاقة

$$\underline{I}_c = \underline{I}_s . \frac{\underline{Z}_i}{\underline{Z}_i + jX_c} \qquad (3,144)$$

$$\underline{I}_c = \frac{-E.R - E.X_L}{jR.X_L} = \frac{\dfrac{jR.X_L}{R + jX_L}}{\dfrac{jR.X_L}{R + jX_L} + jX_C}$$

$$= E.\frac{-R - X_L}{jRX_L}.\frac{jRX_L}{jR.X_L + jX_C.R - X_L.X_C}$$

$$\underline{I}_c = E.\frac{R + X_L}{X_L.X_C - jR\left(X_L - X_C\right)} \qquad (3,145)$$

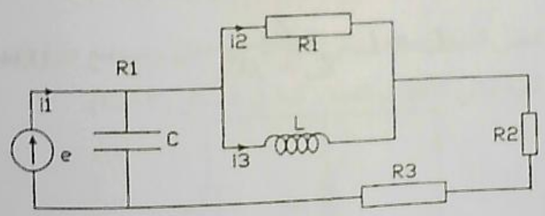
مسألة (٣-١٣):

لدينا الدارة الكهربائية المبينة في الشكل (٣-٤٩) وفيها

$$e = 100 .\sin(\omega.t)[V], \omega = 500\ {rad}/{s}, R_1 = 100[\Omega]$$

$$R_2 = 50[\Omega], R_3 = 50[\Omega], L = 0,1[H]$$

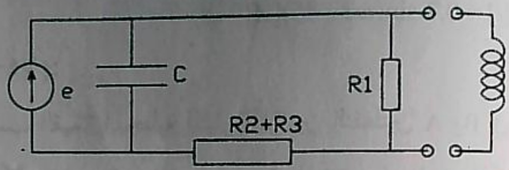
والمطلوب حساب القيمة اللحظية للتيار المار في الملف باستخدام طريقة مولد التيار المكافىء .[6]



الشكل (٣-٤٩)

الحل:

نفصل الملف المطلوب حساب التيار فيه ونعتبره ثنائي أقطاب غير فعال وبقية الدارة عبارة عن ثنائي الأقطاب الفعال كما في الـشكل (٣-٥٠)



الشكل (٣-٥٠)

- حساب تيار القصر I_s

$$\underline{I}_s = \frac{\underline{E}}{R_2 + R_3} = \frac{E}{R_2 + R_3}$$
$$= \frac{100}{\sqrt{2}.(50+50)} = 0{,}7[A]$$

- نحسب الممانعة الداخلية $\underline{Z}_i$

$$\underline{Z}_i = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$
$$= \frac{100\ .100}{100\ +100} = 50\,[\Omega]$$

- نحسب التيار المار في الملف من العلاقة

$$\underline{I}_L = \underline{I}_s.\frac{\underline{Z}_i}{\underline{Z}_i + jX_L}$$
$$= 0{,}7.\frac{50}{50 + j500.0{,}1} = \frac{0{,}7}{\sqrt{2}}.e^{-j45}[A]$$

نضرب الطرفين ب $\sqrt{2}$ و $e^{j\omega.t}$ ونعيد التحويل إلى قيمة حقيقية.

نختار الجزء التخيلي من الشعاع الدائر لأننا انطلقنا من تابع جيبي

$\underline{i} = 0,7.e^{j(\omega.t-45)}$

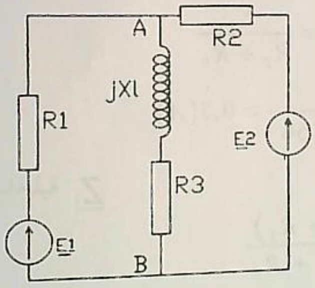
$i(t) = \text{Im}[\underline{i}] = 0,7.\sin(\omega.t - 45)[A]$

مسألة (٣-١٤):

احسب القيمة اللحظية للتيار المار بين النقطتين A وB في الدارة المبينة في الشكل (٣-٥١) وذلك بمساعدة طريقة مولد التيار المكافئ مع العلم أن: [9]

$e_1 = 50.\sin(\omega.t + 45)[V]$ $\quad R_1 = 2[\Omega], R_2 = 5[\Omega]$

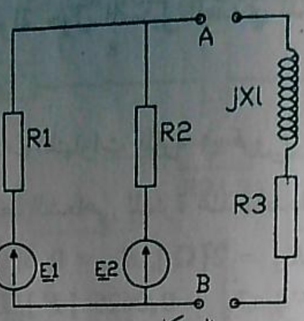
$e_2 = 100.\sin(\omega.t + 30)[V]$ $\quad R_3 = 2[\Omega], X_L = 4[\Omega]$



الشكل (٣-٥١)

الحل:

نفصل الخط الواصل بين النقطتين A و B ونعتبره ثنائي أقطاب غير فعال وبقية الدارة عبارة عن ثنائي الأقطاب الفعال كما في الشكل (٣-٥٢)



الشكل (٣-٥٢)

- حساب تيار القصر $\underline{I}_s$

$$\underline{I}_s = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = \frac{\frac{50}{\sqrt{2}} \cdot e^{j45}}{2} + \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} \cdot e^{j30}}{5}$$

$$= 25 + j19,57 = 31,75 . e^{j38} [A]$$

- نحسب الممانعة الداخلية $\underline{Z}_i$

$$\underline{Z}_i = \frac{R_1 . R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2.5}{2+5} = \frac{10}{7} [\Omega]$$

- نحسب التيار المار في الخط A وB من العلاقة:

$$\underline{I}_{AB} = \underline{I}_s . \frac{\underline{Z}_i}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_{AB}} = 31,75 e^{j38} . \frac{1,43}{1,43 + 2 + j4}$$

$$= 8,6 . e^{-j11} [A]$$

القيمة اللحظية للتيار المار في الخط A و B

$$i_{ab}(t) = 12,18 . \sin(\omega . t - 11) [A]$$

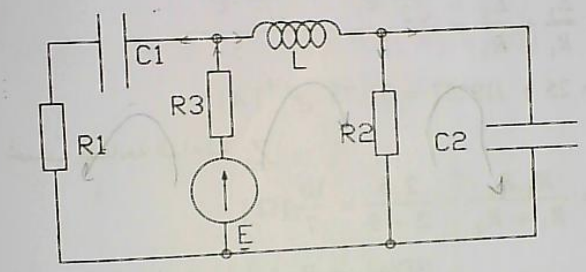
٣-٦: مسائل غير محلولة حول التمثيل العقدي لدارات التيار المتناوب :

مسألة (٣ – ٦-١):

المطلوب حساب التيارات المارة في فروع الدارة المبينة في الشكل (٣-٥٣) ورسم المخطط الشعاعي للدارة عند المحددات التالية:

$$R_1 = 5[\Omega], R_2 = 2[\Omega], R_3 = 0,5[\Omega]$$
$$C_1 = 0,05[F], C_2 = 0,0625[F], L = 0,5[H]$$

عند تطبيق توتر $\underline{E} = 100\, e^{j0}[V]$ وبسرعة زاوية $\omega = 4[rad/s]$ ، **[6]**



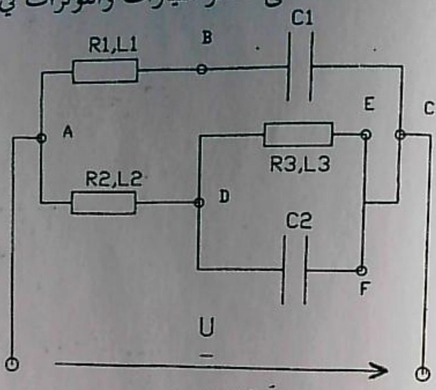
الشكل (٣-٥٣)

مسألة (٣ – ٦-٢):

المطلوب حساب التيار الكلي المستجر عند تطبيق توتر $\underline{U} = 200[V]$ بتردد $f = 50[HZ]$ على طرفي الدارة المبينة على الشكل (٣-٥٤) ذات المحددات التالية:

$$R_1 = 12[\Omega], R_2 = 2[\Omega], R_3 = 3[\Omega]$$
$$C_1 = 300[\mu F], C_2 = 200[\mu F]$$
$$X_{L1} = 12[\Omega], X_{L2} = 6[\Omega], X_{L3} = 5[\Omega]$$

وارسم المخطط الشعاعى لسائر التيارات والتوترات في الدارة. [9]



الشكل (٣-٥٤)

مسألة (٣ - ٦-٣):

لدينا الدارة الكهربائية المبينة على الشكل (٣-٥٥) وفيها

$$\underline{E_1} = 100 \cdot e^{j0} [V], \underline{E_2} = 120 \cdot e^{j30} [V]$$
$$\underline{Z_1} = 3 + j4 [\Omega], \underline{Z_2} = 8,67 + j5 [\Omega]$$
$$\underline{Z_3} = 10 - j10 [\Omega]$$

المطلوب:

١- حساب التيارات المارة في فروع الدارة وفق طريقة التراكم.

٢-رسم المخطط الشعاعي لكافة التيارات والتوترات. [5]

الأجوبة:

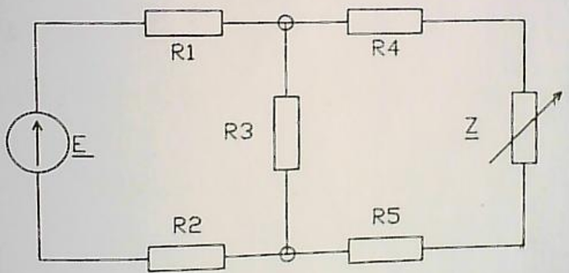
$\underline{I_{CH}} = 0,5 - j1,5A]$, $\underline{I_{GH}} = -1 - j2[A]$

مسألة (٣ – ٦–٦):

لدينا الدارة المبينة في الشكل(٣-٥٨)، والمطلوب تحديد المجال الذي يتغير فيه مطال وزاوية طور التيار المار في الممانعة $\underline{Z}$ إذا تغيرت قيمتها في المجال $\underline{Z} = -j5,.....,-j10[\Omega]$ وذلك وفق طريقة مولد التوتر المكافئ مع العلم أن:**[11]**

$R_1 = 2[\Omega], R_2 = 2[\Omega], R_3 = 4[\Omega]$

$R_4 = 2[\Omega], R_5 = 1[\Omega], e = 10 .\sin(\omega .t)[V]$



الشكل (٣-٥٨)

الأجوبة:

$I_m = 0,707,........0,447[A]$

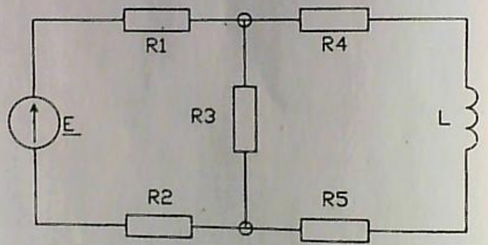
$\phi_i = 45,........64$

مسألة (٣ – ٦–٧):

لدينا الدارة المبينة في الشكل(٣-٥٩) والمطلوب تحديد المجال الذي يتغير فيه مطال وزاوية طور التيار المار في الممانعة L إذا تغير التردد في المجال

$\omega = 50,........,5000[rad/s]$ وذلك وفق طريقة مولد التيار المكافىء مع العلم أن : **[11]**

$$R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 30\,[\Omega],\ R_3 = 60\,[\Omega]$$
$$L = 0{,}18\,[H],\ e = 9.\sin(\omega .t)[V]$$



الشكل (٣-٥٩)

الأجوبة:

$$I_m = 35,........,5[mA]$$
$$\varphi_i = -45,........,-84.28$$

الحلول البيانية لدارات التيار المتناوب الأحادي الطور

٤-١ : تحويل دارة تسلسلية إلى دارة تفرعية مكافئة على المأخذين وبالعكس:

٤-١-١ : التحويل من دارة تسلسلية إلى دارة تفرعية مكافئة :

إذا كان لدينا ثنائي أقطاب عقدي ممثل بدارة تسلسلية مؤلفة من جزء حقيقي وجزء تخيلي، فإنه يمكن أن نحول هذه الدارة إلى دارة تفرعية عقدية مكافئة ونحسب عنصريها الحقيقي والتخيلي على المأخذين **[12]**.

لهذا الغرض نساوي معادلة الممانعة العقدية للدارة المعطاة المراد تحويلها مع مقلوب معادلة السماحية العقدية للدارة المكافئة المطلوب حسابها، وبمساواة الجزأين الحقيقيين نستطيع حساب المركبة الحقيقية للدارة المكافئة، وبمساواة الجزأين التخيليين نستطيع حساب المركبة التخيلية للدارة المكافئة.

ويكافئ التحويل من دارة تسلسلية إلى دارة تفرعية مكافئة على المأخذين التحويل من $\underline{Z}$ إلى $\underline{Y}$.

$$\underline{Y}=\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{1}{R_s+jX_s}=G_p+jB_p \qquad (4,1)$$

ونلاحظ هنا أن إشارة الناقص قبل المركبات التخيلية وتغير هـذه الإشارة لهذه المركبات عند الانتقال من المسايرة إلى المفاعلة و بالعكس ، وينجم هذا التغيير من تعريف كل من X و Y .

٤-٢ : استخدام التقريب في التحويل من دارة تسلسلية إلى دارة تفرعية وبالعكس:[12]

٤-٢-١ : التحويل من دارة تسلسلية إلى دارة تفرعية:

بما أن المركبة الحقيقية و المركبة التخيلية لكـل مـن الممانعـة و لسماحية العقديتين تمتلكان في بعض الحالات قيماً مطلقة متفاوتة ، لذلك يفضل استخدام التقريب في معادلات التحويل وذلك لتسهيل العمـل الحسابي وفق الشكل التالي:

$$G_P = \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} \qquad (4,15)$$

وبما أن:

$$R_P = \frac{1}{G_P} \qquad (4,16)$$

فإن :

$$R_P = \frac{R_S^2 + X_S^2}{R_S} = R_S[1 + (\frac{X_S}{R_S})^2] \qquad (4,17)$$

و كذلك

$$B_P = -\frac{X_S}{R_S^2 + X_S^2} \qquad (4,18)$$

وبما أن:

$$X_P = -\frac{1}{B_P} \tag{4,19}$$

فإن :

$$X_P = \frac{R_S^2 + X_S^2}{X_S} = X_S[1 + (\frac{R_S}{X_S})^2] \tag{4,20}$$

عندما تكون

$$R_S >> |X_S| \tag{4,21}$$

فإننا نلاحظ ومن العلاقتين (4,17) و (4,20) أن

$$R_P \approx R_S$$

$$X_P \approx \frac{R_S^2}{X_S} \tag{4,22}$$

أما إذا كانت

$$R_S << |X_S| \tag{4,23}$$

فإننا نلاحظ ومن العلاقتين (4,17) و (4,20) أن

$$X_P \approx X_S$$

$$R_P \approx \frac{X_S^2}{R_S} \tag{4,24}$$

٤-٢-٢: التحويل من دارة تفرعية إلى دارة تسلسلية :

$$R_S = \frac{G_P}{G_P^2 + B_P^2} \tag{4,25}$$

- من المثلث OAC نجد:

$$\sin\varphi = \frac{X_S}{Z_S} \qquad (4,33)$$

$$\cos\varphi = \frac{R_S}{Z_S} \qquad (4,34)$$

- من المثلث OAD نجد:

$$\sin\varphi = \frac{Z_S}{X_P} \qquad (4,35)$$

- من المثلث OAB نجد:

$$\cos\varphi = \frac{Z_S}{R_P} \qquad (4,36)$$

ومن هذه العلاقات وبعد مساواتها معاً نجد أن:

$$Z_S^2 = X_P . X_S$$
$$Z_S^2 = R_P . R_S \qquad (4,37)$$

وهي العلاقات نفسها التي حصلنا عليها عند التحويل من دارة تسلسلية إلى دارة تفرعية مكافئة عند المآخذين.

٤-٣-٢: التحويل من دارة تفرعية إلى دارة تسلسلية بيانياً:

لدينا السماحية العقدية $\underline{Y} = G_P + jB_P$ ونود معرفة الجزء الحقيقي R_S والجزء التخيلي X_S من الممانعة العقدية $\underline{Z}$ بيانياً.

- نرسم الشعاع $\underline{Y} = G_P + jB_P$.

- نرسم عموداً عليه يمر من نهايته ويقطع المحور الحقيقي والمحور التخيلي.

- يقطع المحور الحقيقي في النقطة B التي تحدد قيمة الجزء الحقيقي $G_S = \frac{1}{R_S}$.

- يقطع المحور التخيلي في النقطة D التي تحدد قيمة الجزء التخيلي $B_S = -\frac{1}{X_S}$.

وبنفس الأسلوب السابق يمكن أن نبرهن صحة النتائج

- من المثلث OAC نجد:

$$\cos\varphi = \frac{G_P}{Y_P} \qquad (4,38)$$

$$\sin\varphi = \frac{B_P}{Y_P} \qquad (4,39)$$

- من المثلث OAB نجد:

$$\sin\varphi = \frac{Y_P}{G_P} \qquad (4,40)$$

- من المثلث OAD نجد:

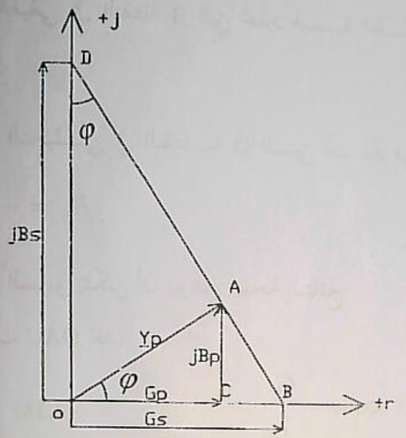
$$\cos\varphi = \frac{Y_P}{B_P} \qquad (4,41)$$

ومن هذه العلاقات المثلثية وبعد مساواتها نجد

$$Y_P^2 = B_P . B_S$$

$$Y_P^2 = G_P . G_S \qquad (4,42)$$

وهي العلاقات نفسها التي حصلنا عليها عند التحويل من دارة تفرعية إلى دارة تسلسلية مكافئة عند المأخذين.



الشكل (٤-٤) التحويل من تفرعية إلى تسلسلية بيانياً

مسألة (٤-١):

احسب عناصر توصيل الدارات المكافئة للدارات المبينة في الشكل (٤-٥) وذلك عندما يكون التردد $f = 50[HZ]$.

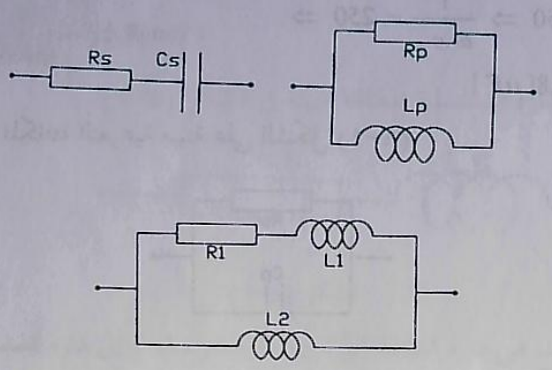
$$R_s = 100\,[\Omega], C_s = 1[\mu F]$$
$$R_p = 1[K\Omega], L_p = 1[H]$$
$$R_1 = 100\,[\Omega], L_1 = 3[H], L_2 = 1[H]$$

الحل:

الدارة أ: هي دارة تسلسلية ونود إيجاد عناصر الدارة التفرعية المكافئة

$$X_s = \frac{1}{\omega.c_s} = \frac{1}{2.\pi.800.1.10^{-6}} = 200[\Omega]$$

ومنه نلاحظ أنه لا يمكن استخدام التقريب وبالتالي



الشكل (٤-٥)

$$G_P = \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} \Rightarrow$$

$$R_P = \frac{R_S^2 + X_S^2}{R_S} = R_S[1 + (\frac{X_S}{R_S})^2]$$

$$= 100\ [1 + (\frac{200}{100})^2] = 500\ [\Omega]$$

$$B_P = -\frac{X_S}{R_S^2 + X_S^2} \Rightarrow$$

$$X_P = \frac{R_S^2 + X_S^2}{X_S} = X_S[1 + (\frac{R_S}{X_S})^2]$$

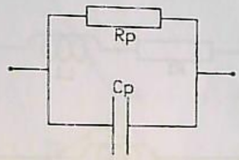
$$= 200\ [1 + (\frac{100}{200})^2]$$

$$= 250\ [\Omega]$$

$$X_P = 250 \Rightarrow \frac{1}{\omega . c_p} = 250 \Rightarrow$$

$$c_p = 0{,}8[\mu F]$$

الدارة المكافئة التفرعية مبينة على الشكل (٤-٦)



الشكل (٤-٦)

الدارة ب:

$$X_p = \omega . L_p = 5[K\Omega]$$

ومنه نلاحظ أنه لا يمكن استخدام التقريب وبالتالي

$$R_S = \frac{G_P}{G_P^2 + B_P^2} \Rightarrow$$

$$R_S = R_P . \frac{1}{1 + (\frac{R_P}{X_P})^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{25}}$$

$$= 0{,}96[K\Omega]$$

$$X_S = -\frac{B_P}{G_P^2 + B_P^2} \Rightarrow$$

$$X_S = X_P . \frac{1}{1 + (\frac{X_P}{R_P})^2} = \frac{5}{1 + 25}$$

$$= 0{,}192[K\Omega]$$

$$X_S = \omega . L_S \Rightarrow$$

$$L_S = \frac{192}{5000} = 38,4[mH]$$

وبالتالي الدارة التسلسلية المكافئة مبينة في الشكل (٤-٧).



الشكل (٤-٧)

<u>الدارة جـ:</u> هي دارة مختلطة نحوّلها إلى دارة تفرعية، ثم إلى دارة تسلسلية مكافئة

$$X_{S1} = \omega . L_1 = 5000.3 = 15[K\Omega] = 150.R_1$$

نلاحظ أن $X_s >> R_s$ وبالتالي يمكن أن نستخدم قوانين التقريب

$$R_P \approx \frac{X_{S1}^2}{R_S} = \frac{(150\ .R_1)^2}{R_1} = 2,25[M\Omega]$$

$$X_P \approx X_{S1} \Rightarrow L_{P1} \approx L_1$$

وبالتالي يكون عامل التحريض الكلي

$$L_P = \frac{L_{P1} . L_2}{L_{P1} + L_2} = \frac{3.1}{3+1} = 0,75[H]$$

لدينا الآن دارة تفرعية (R_P, L_P) ، نحولها إلى دارة تسلسلية (R_S, L_S)

حيث :

$$R_P = 2,25[M\Omega]$$

$$X_P = \omega . L_P = 3,75[K\Omega]$$

ومنه نلاحظ أن $R_p >> X_p$ وبالتالي يمكن استخدام التقريب

$$R_S \approx \frac{X_P^2}{R_P} \Rightarrow$$
$$= 6,25 \ [\Omega]$$
$$X_S \approx X_P \Rightarrow$$
$$L_S = 0,75 \ [H]$$

وبالتالي الدارة المكافئة للدارة جـ مبينة على الشكل (٤-٨).



الشكل (٤-٨)

٤-٤ : العناصر الأساسية العملية في الترددات المنخفضة والعالية:

إن العناصر الأساسية التي تطرقنا إليها حتى الآن هي العناصر المثالية التي يتم فيها نوع واحد من تحويل القدرة . إلا أنه - عملياً - لا يمكن صنع عناصر التوصيل الثلاث الأساسية بأشكالها المثالية، لذلك يجب تمثيل الملف بمجموعة من أنواع التوصيل الأساسية المثالية الثلاثة، أي تمثيله بدارة مكافئة وكذلك هو الحال بالنسبة للمكثف والمقاومة[11] .

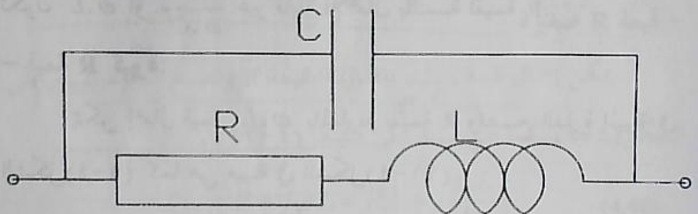
٤-٤-١ : المقاومة الأومية العملية: Practical Resistance

عند مرور تيار في المقاومة يتولد حقل مغناطيسي متناوب يمكننا أن نمثله بعامل التحريض الذاتي L ، كما أن التوتر الهابط على طرفي المقاومة يولد حقلاً كهربائياً يمكن تمثيله بالسعة الكهربائية C .

بسبب وجود L ينشأ توتر آخر إضافةً للتوتر على طرفي المقاومة R ويكافئ تقسيم التوصيل على التسلسل وبذلك يكون من الأجدى وصل L على التسلسل مع المقاومة R.

بسبب فرق الكمون بين كل لفة وأخرى من لفات المقاومة يوجد الحقل الكهربائي، ويرافقه في التيار المتناوب وجود تيار إزاحة إضافةً للتيار المار في المقاومة R.

تقسيم التيار يعني التوصيل على التفرع، وبذلك يكون من الأجدى وصل السعة على التفرع كما في الشكل (٤-٩).

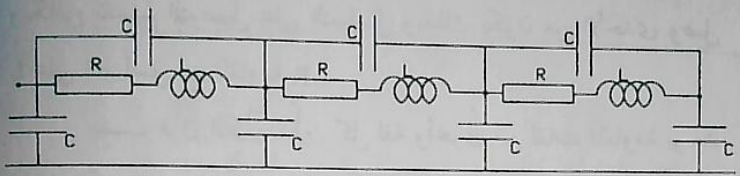


الشكل(٤-٩) الدارة المكافئة للمقاومة العملية

إن هذه الدارة هي دارة تقريبية حيث افترضنا أن L و C عنصرا توصيل مركزان، أما في الواقع فإن تأثير كل من الحقل المغناطيسي والحقل الكهربائي يتوزع على امتداد المقاومة العملية بشكل متساوٍ، لذلك يمكن تمثيل الدارة المكافئة للمقاومة بشكل أفضل كما هو في الشكل (٤-١٠).

مما سبق نلاحظ أن المقاومة العملية ليست أومية بحتة وإنما يوجد زاوية طور للتوتر والتيار على مأخذيها أي

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \qquad (4,43)$$



الشكل(٤-١٠) الدارة المكافئة للمقاومة العملية في الترددات العالية بمراعاة السعة الأرضية.

وتمتلك المقاومة الأومية زاوية ضياع ε موجبة أو سالبة حسبما تكون $\omega.L$ أو $\frac{1}{\omega.C}$ غير قابلة للإهمال بالنسبة لقيمة R.

– قيمة R كبيرة:

يمكن إهمال قيمة $\omega.L$ بالمقارنة بقيمة R وتصبح الدارة المبينة في الشكل(٤-٩) كما هي مبينة في الشكل(٤-١١) .

$$\underline{Z_{AB}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega.c} = R.\frac{1}{1 + j\omega.c.R} \qquad (4,44)$$

والمخطط الشعاعي لهذه الحالة كما في الشكل(٤-١٢) ومنه نجد:

$$tg\ \varepsilon = \omega\ .c\ .R \qquad (4,45)$$

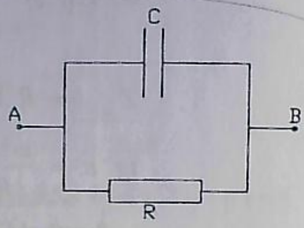
وعندما تكون

$$\omega\ .c << \frac{1}{R}$$

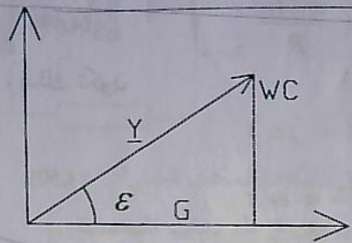
$$tg\ \varepsilon \approx \varepsilon \approx \omega.c\ .R \qquad (4,46)$$

وبذلك تكون

$$\underline{Z_{AB}} \approx R.(1 - j\varepsilon)$$
$$tg\ \varepsilon \approx \varepsilon \approx \omega.c.R \approx \omega.\tau_c \qquad (4,47)$$



الشكل(٤-١١) الدارة المكافئة للمقاومة العملية (R كبيرة)



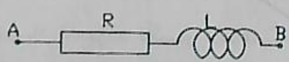
الشكل(٤-١٢) المخطط الشعاعي

– قيمة R صغيرة

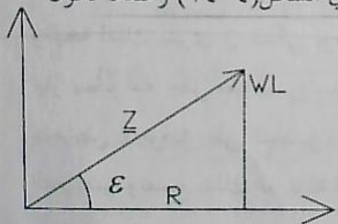
يمكن إهمال قيمة $\frac{1}{\omega.C}$ بالمقارنة بقيمة R وتصبح الدارة المبينة على الشكل(٤-٩) كما هي مبينة على الشكل(٤-١٣) .

$$\underline{Z_{AB}} = R + j\omega.L = R\left(1 + j\frac{\omega.L}{R}\right) \qquad (4,48)$$

والمخطط الشعاعي لهذه الحالة كما في الشكل(٤-١٤) وعندما تكون



الشكل(٤-١٣) الدارة المكافئة للمقاومة العملية (R صغيرة)



الشكل(٤-١٤) المخطط الشعاعي

$$\omega . L << R$$

$$tg\ \varepsilon \approx \varepsilon \approx \frac{\omega . L}{R} \qquad (4,49)$$

وبذلك تكون

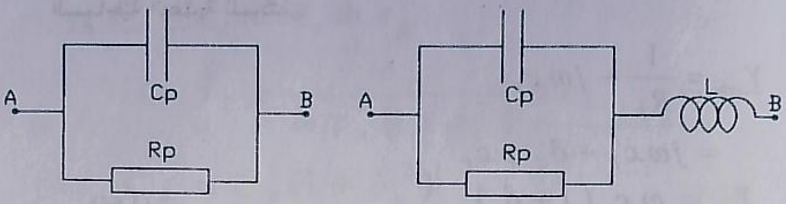
$$\underline{Z_{AB}} \approx R.(1 + j\varepsilon)$$

$$tg\ \varepsilon \approx \frac{\omega . L}{R} \approx \omega . \tau_L \qquad (4,50)$$

٤-٤-٢ : المكثف العملي: Practical Capacitor

عند تطبيق توتر مستمر على مكثف عملي، فإننا نلاحظ بعد شحنه تماماً مرور تيار مستمر في العازل الموجود بين صفيحتي المكثف يؤدي بعد مرور زمن ما إلى تفريغ المكثف، ويسمى هذا التيار تيار الضياع . لذلك في الدارة المكافئة للمكثف يمكن تمثيل هذه الضياعات بمقاومة أومية موصلة على التفرع مع السعة C كما هو مبين في الشكل (٤-١٥-أ).

في التيار المتناوب تتغير قطبية صفيحتي المكثف بوتيرة تردد التيار، ونتيجة لذلك يسري في سلكي توصيل المكثف وعلى صفيحتي المكثف تيار ينجم عنه حقل مغناطيسي متغير. ويمثل هذا الحقل في الدارة المكافئة بتحريض L موصل على التسلسل، وبازدياد التردد تكبر المفاعلة التحريضية وتصبح بذلك غير قابلة للإهمال كما في الشكل (٤-١٥-ب)



الشكل(٤-١٥) الدارة المكافئة للمكثف العملي

٤-٤-٢-١: الدارة المكافئة للمكثف في الترددات المنخفضة:

إذا كان التردد لا يتجاوز بضعة $100[KHZ]$ أمكن تطبيق الدارة المكافئة المبينة على الشكل (٤-١٥-أ) أي يمكن إهمال تأثير التحريض وذلك يعني أنه حتى في أبسط الدارات المكافئة للمكثف لا يكون الفرق بين زاويتي طور التوتر والتيار عند مأخذي المكثف مساوياً 90^o بل

$$|\varphi| = |90^{O} - \delta_C| \qquad (4,51)$$

حيث: δ_C تسمى زاوية ضياع المكثف

$tg\,\delta_C = d_C$ عامل ضياع المكثف

ومن المخطط الشعاعي المبين على الشكل (٤-١٦) نجد أن

$$tg\,\delta_C = d_C = \frac{1}{R_p.\omega.c_p} \approx \delta_C \qquad (4,52)$$

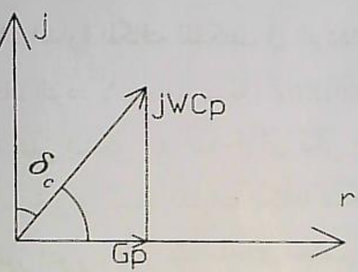
قيمة δ_C تتعلق بنوع العازل الكهربائي .وعند معرفة δ_C يمكن حسا ب مقاومة ضياع المكثف.

$$R_p = \frac{1}{tg\,\delta_C.\omega.c_p} \approx \frac{1}{\delta_C.\omega.c_p} \qquad (4,53)$$

$$\underline{Y}_{ab} = \frac{1}{R_P} + j\omega.c_P$$

$$= j\omega.c_P + \delta_C.\omega.c_P$$

$$\underline{Y}_{ab} = \omega.c_p(j + \delta_c) \tag{4,54}$$



الشكل(٤-١٦) المخطط الشعاعي للدارة التفرعية

يمكن تحويل الدارة المكافئة التفرعية إلى دارة تسلسلية مكافئة

$$R_S = \frac{G}{G_P^2 + B_P^2} = \frac{\delta_c.\omega..c_p}{(\omega.c_P)^2.(1+\delta_c)^2} \tag{4,55}$$

$$= \frac{\delta_c}{\omega.c_p.(1+\delta_c^2)}$$

وبما أن زاوية الضياع للمكثف لا تتغير فإن قيمة δ_c من المخطط الشعاعي للدارة التسلسلية المبين في الشكل (٤-١٧)

$$tg\,\delta_c \approx \delta_c = R_s.\omega.c_s$$

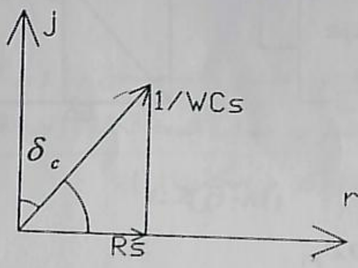
$$= \frac{\delta_c}{\omega.c_p.\left(1+\delta_c^2\right)}.\omega.c_s \qquad (4,56)$$

$$C_S = C_P(1+\delta_c^2) \qquad (4,57)$$

وعندما تكون قيمة عامل الضياع صغيرة جداً $1 >> \delta_c$ فإن

$$R_S \approx \frac{\delta_c}{\omega.c_P}$$

$$C_S \approx C_P \qquad (4,58)$$



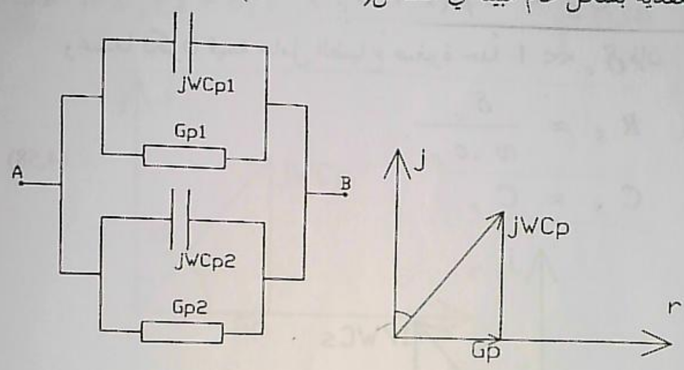
الشكل(٤-١٧) المخطط الشعاعي للدارة التسلسلية

مسألة (٤-٢):

نصل مكثفين على التفرع C_{p1} و C_{p2} وزاويتي ضياعهما δ_{c1} و δ_{c2}، والمطلوب حساب السعة الكلية وزاوية الضياع الكلية وتعميم هذه النتيجة على أكثر من مكثفين [11] .

الحل:

نفترض أن التردد منخفض وبالتالي فإن الدارة المكافئة للمكثف هي المبينة في الشكل (٤-١٥-أ)، وعند وصل مكثفين على التفرع تصبح الدارة كما في الشكل(٤-١٨-أ)، والمخطط الشعاعي لسماحية المكثف العقدية بشكل عام مبينة في الشكل(٥-١٨-ب).



الشكل(٤-١٨)

$$\underline{Y_1} = G_{P1} + j\omega . c_{P1}$$

$$\underline{Y_2} = G_{P2} + j\omega . c_{P2}$$

$$\underline{Y_t} = \underline{Y_1} + \underline{Y_2} = G_{Pt} + j\omega . c_{Pt}$$

$$C_{Pt} = C_{P1} + C_{P2}$$

وعند توصيل أكثر من مكثفين تكون السعة الكلية

$$C_{pt} = \sum_{\upsilon} C_{p\upsilon}$$

$$G_{Pt} = G_{P1} + G_{P2}$$

$$\delta_{Ct} . \omega C_{Pt} = \delta_{C1} . \omega C_{P1} + \delta_{C2} . \omega C_{P2}$$

$$\delta_{Ct} = \frac{\delta_{C1} . C_{P1} + \delta_{C2} . C_{P2}}{C_{P1} + C_{P2}}$$

وعند توصيل أكثر من مكثفين على التفرع يكون

$$\delta_{ct} = \frac{\sum_{\upsilon} \delta_{c\upsilon} \cdot C_{p\upsilon}}{\sum_{\upsilon} C_{p\upsilon}}$$

مسألة (٤-٣):

نصل مكثفين على التسلسل C_{P1} و C_{P2} وزاويتي ضياعهما δ_{C1} و δ_{C2}، والمطلوب حساب السعة الكلية وزاوية الضياع الكلية وتعميم هذه النتيجة على أكثر من مكثفين[11] .

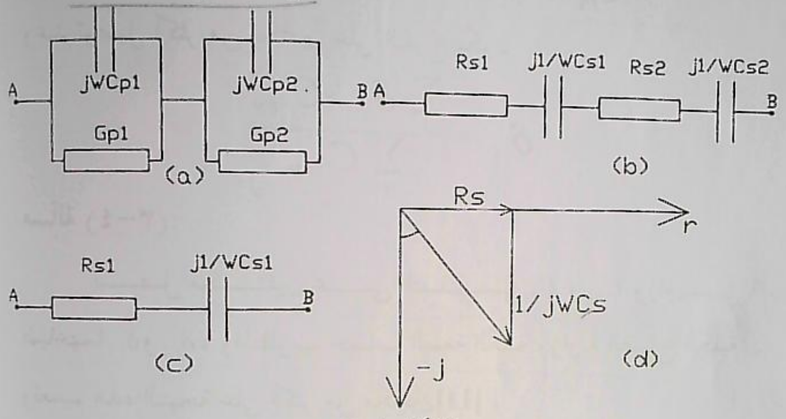
الحل:

نحول الدارتين التفرعيتين للمكثفين الموصلين على التسلسل إلى دارتين تسلسليتين مكافئتين، بحيث نحصل على دارة تسلسلية بحتة كما في الشكل (٤-١٩-جـ)

$$\underline{Z}_1 = R_{s1} + \frac{1}{j\omega . C_{s1}}$$

$$\underline{Z}_2 = R_{s2} + \frac{1}{j\omega . C_{s2}}$$

$$\underline{Z}_t = R_{st} + \frac{1}{j\omega . C_{st}}$$



الشكل(٤-١٩)

$$R_{St} + \frac{1}{j\omega . C_{St}} = \left(R_S + R_{S2}\right) - j\left(\frac{1}{\omega . C_{S1}} + \frac{1}{\omega . C_{s2}}\right)$$

$$R_{St} = R_{S1} + R_{S2}$$

$$\frac{1}{C_{St}} = \frac{1}{C_{S1}} + \frac{1}{C_{S2}}$$

وعند توصيل أكثر من مكثفين على التسلسل

$$\frac{1}{C_{st}} = \sum_{\upsilon} \frac{1}{C_{s\upsilon}}$$

ومن الشكل (٤-١٩-د) نحسب زاوية الضياع الكلية

$$\delta_{St} = \frac{R_{St}}{\frac{1}{\omega.C_{St}}} = \frac{R_{S1} + R_{S2}}{\frac{1}{\omega.C_{S1}} + \frac{1}{\omega.C_{S2}}}$$

حيث:

$$\delta_{C1} = \frac{R_{S1}}{\frac{1}{\omega.C_{S1}}} \Rightarrow R_{S1} = \frac{\delta_{C1}}{\omega.C_{C1}}$$

$$\delta_{C2} \frac{R_{S2}}{\frac{1}{\omega.C_{S2}}} \Rightarrow R_{S2} = \frac{\delta_{C2}}{\omega.C_{C2}}$$

نعوض قيمتي R_{S1} و R_{S2} في علاقة δ_{ct} فنحصل

$$\delta_{ct} = \frac{\frac{\delta_{c1}}{\omega.C_{S1}} + \frac{\delta_{c2}}{\omega.C_{S2}}}{\frac{1}{\omega.C_{S1}} + \frac{1}{\omega.C_{S2}}} = \frac{\frac{\delta_{c1}}{C_{S1}} + \frac{\delta_{c2}}{C_{S2}}}{\frac{1}{C_{S1}} + \frac{1}{C_{S2}}}$$

$$\delta_{ct} = \frac{\delta_{c1}.C_{S2} + \delta_{c2}.C_{S1}}{C_{S1} + C_{S2}}$$

وبما أن قيمة زاوية الضياع لا تتغير إذا كانت الدارة المكافئة تفرعية أو تسلسلية فإن $C_P = C_S$ وبالتالي

$$\delta_{ct} = \frac{\delta_{c1}.C_{P2} + \delta_{c2}.C_{P1}}{C_{P1} + C_{P2}}$$

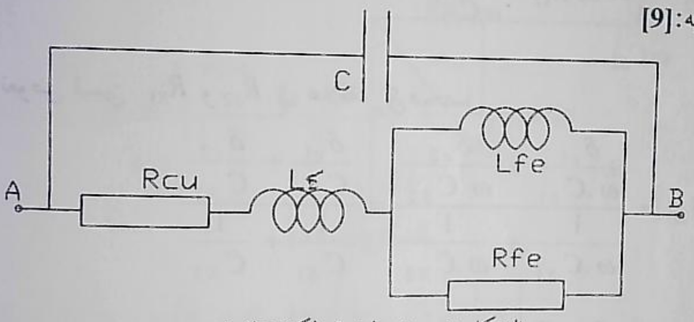
وعند توصيل أكثر من مكثفين على التسلسل

$$\delta_{ct} = \frac{\sum_{\upsilon} \frac{\delta_{c\nu}}{C_{p\nu}}}{\sum_{\upsilon} \frac{1}{C_{p\nu}}}$$

٤-٤-٣ : الملف العملي: Practical Coil

يصنع الملف الكهربائي بأشكال متعددة منها الهوائي، الأسطواني ، والمبسط ....، ويكون تحريضه أكبر إذا كان بقلب حديدي.

الدارة المكافئة لملف ذي قلب حديدي مبينة في الـــشكل(٤-٢٠) وفيه:[9]



الشكل(٤-٢٠) الدارة المكافئة للملف

R_{cu} - المقاومة الأومية للملفات النحاسية

L_{Fe} - تحريض القلب الحديدي، ويمثل التحويـــل المغناطيـــسي للقـــدرة الكهربائية في الحديد

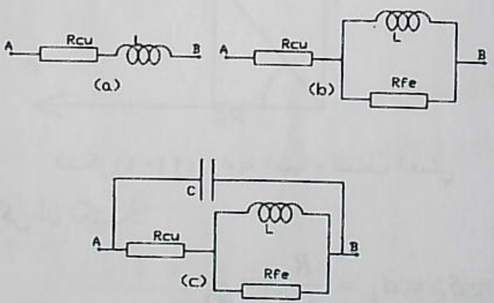
L_{δ} -التحريض التسربي في الهواء، ويمثل التحويـــل المغناطيـــسي للقـــدرة الكهربائية في الهواء

R_{Fe} - الضياعات التي تنشأ في القلب الحديدي للملف تمثل بمقاومة R_{Fe} موصلة على التفرع مع التحريض L_{Fe} (ضياعات الإبطاء المغناطيسي وضياع التيارات الإعصارية)

C - سعة الملف، بما أن هبوط التوتر بين كل لفة وأخرى يشكل فرق كمون بين كل لفة وأخرى بذلك ينشأ حقل كهربائي بين كل لفة وأخرى، وكل طبقة وأخرى، ويعبر عن ذلك بسعة مركزة توصل على التفرع في الدارة المكافئة.

يمكن أن نبسط هذه الدارة عملياً إلى إحدى الدارات الثلاث المبينة في الشكل (٤-٢١) حسب ظروف التشغيل.

الدارة المبينة في الشكل(٤-٢١-أ) تمثل ملفاً هوائياً في الترددات المنخفضة (إهمال التأثير السعوي بالمقارنة مع التحريضي).



الشكل(٤-٢١)

الدارة المبينة في الشكل(٤-٢١-ب) تمثل ملفاً ذا قلب حديـــدي في الترددات المنخفضة (إهمال التأثير السعوي وإهمال الحقل التسربي).

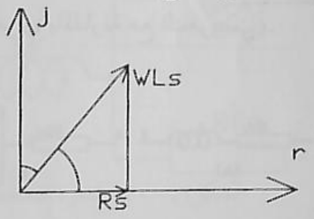
الدارة المبينة في الشكل(٤-٢١-جـ) تمثـــل ملفـــاً هوائيـــاً في الترددات العالية (إهمال فقط الحقل التسربي).

وكما هو الحال في المكثف فإن الفرق في زاوية الطور بين التـــوتر والتيار على مأخذي الملف لا تساوي 90^o بل $|\varphi| = |90^o - \delta_L|$ كما هو موضح في الشكل (٤-٢٢) .

حيث:

δ_L تسمى زاوية ضياع الملف

$tg\delta_L = d_L$ عامل ضياع الملف



الشكل(٤-٢٢) زاوية الضياع للملف العملي

ويمكن أن نكتب:

$$tg\,\delta_L = d_L = \frac{R_s}{\omega.L_s} = \frac{1}{Q} \qquad (4,59)$$

حيث:

Q : جودة الملف وبالتالي

$$Q = \frac{1}{d_L} \qquad (4,60)$$

ومن الدارة التسلسلية المكافئة للملف نحسب ممانعة الملف

$$\underline{Z_{ab}} = R_s + j\omega.L_s = \omega.L_s\left(j + \frac{R_s}{\omega.L_s}\right) \qquad (4,61)$$
$$= \omega.L_s\left(j + tg\delta_L\right)$$

$$\underline{Z_{ab}} = \omega.L_s\left(j + \delta_L\right) \qquad (4,62)$$

مسألة (٤-٤):

نقيس بوساطة مقياس الجودة محددات ملف يعمل على التردد $f = 500\,[HZ]$ فنجد أن تحريضه $L = 0{,}5[mH]$ وجودته $Q = 300$. والمطلوب تحديد قيمة مقاومة ضياع الملف في الدارة المكافئة إذا كانت هذه الدارة تسلسلية ثم تفرعية **[12]**.

الحل:

١- الدارة التسلسلية

مقاومة الضياع في الملف

$$d_L = \frac{R_s}{\omega.L_s} = \frac{1}{Q} \Rightarrow R_s = \frac{\omega.L_s}{Q}$$
$$= \frac{2.\pi.5.10^5.5.10^{-4}}{300} = 5{,}23\,[\Omega]$$

وتصبح الدارة المكافئة في الشكل (٤-٢٣-أ)

٢- الدارة التفرعية

نحول L_s و R_s إلى L_P و R_P بموجب قوانين التقريب

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s}$$

$$= R_s \left[1 + \left(\frac{X_s}{R_s} \right)^2 \right]$$

$$X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

$$= X_s \left[1 + \left(\frac{R_s}{X_s} \right)^2 \right]$$

وبما أن:

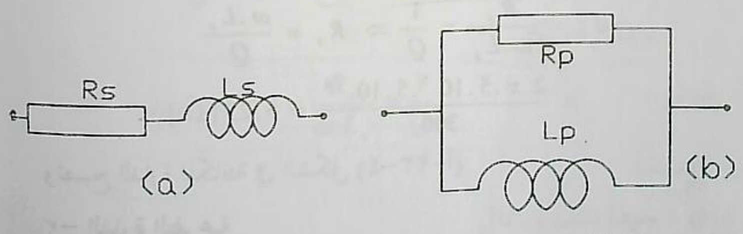
$$Q = \frac{X_s}{R_s} >> 1$$

تصبح

$$R_P \approx \frac{X_S^2}{R_S} = R_S . Q^2 = 5,23 . (300)^2 = 470 \, [K\Omega\}$$

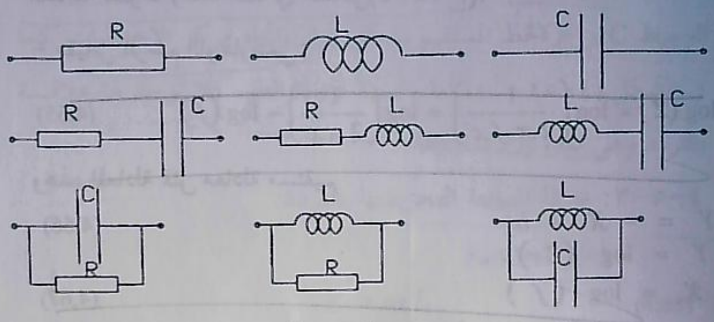
$$X_P \approx X_S \Rightarrow L_P = L_S$$

وتصبح الدارة المكافئة على الشكل (٤-٢٣-ب).



الشكل(٤-٢٣) الدارة المكافئة أ- تسلسلية ب- تفرعية

٤-٥: علاقة الممانعة وزاوية الطور بالتردد:[9]



الشكل(٤-٢٤) ثنائيات الأقطاب الأساسية وطرق توصيلها

٤-٥-١: علاقة المقاومة الأومية بالتردد:

لا يوجد للمقاومة الأومية علاقة بالتردد، وكذلك لا توجد لزاوية طور المقاومة الأومية R علاقة بالتردد وهي ثابتة وتساوي دائماً الصفر.

٤-٥-٢: علاقة الممانعة السعوية بالتردد:

المفاعلة السعوية

$$Z = \frac{1}{\omega . c} \qquad (4,63)$$

ويمكن أن نمثل هذه العلاقة بيانياً بمقياس رسم خطي ومقياس رسم لوغاريتمي.

- مقياس الرسم الخطي:

$$Z = const. \frac{1}{\omega} \qquad (4,64)$$

أي أن الممانعة السعوية تتناسب عكساً مع التردد، وتمثل العلاقة السابقة قطوعاً زائدة كما في الشكل(٤-٢٥-أ).

- مقياس الرسم اللوغاريتمي:

$$\log(Z) = \log\left(\frac{1}{2.\pi.f.c}\right) = \log\left(\frac{1}{2.\pi.c}\right) - \log(f) \qquad (4,65)$$

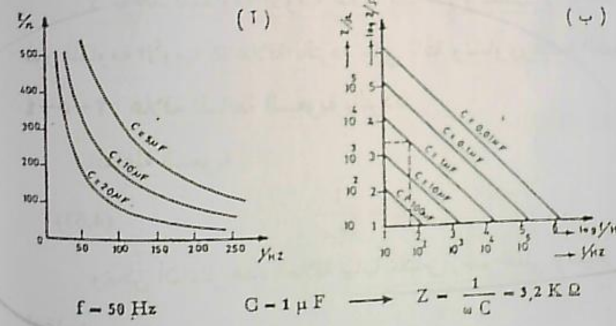
وهذه المعادلة تمثل معادلة مستقيم

$$Y = -X + b \qquad (4,66)$$

$$Y = \log(Z)$$

$$X = \log(f) \qquad (4,67)$$

$$b = \log\left(\frac{1}{2.\pi.c}\right)$$



الشكل(٤-٢٥) علاقة الممانعة السعوية بالتردد أ- مقياس رسم خطي

ب- مقياس رسم لوغاريتمي

وهي معادلة خط مستقيم ميله (1-) متناقص ووسيطه C . بتغيير الوسيط C يزاح الخط المستقيم بشكل موازٍ باتجاه مركز الإحداثيات كما في الشكل (٤-٢٥-ب)، أما بالنسبة لزاوية الطور فلا توجد لها علاقة بالتردد وهي تساوي دائماً -90^{o} .

٤-٥-٣: علاقة الممانعة التحريضية بالتردد:

المفاعلة التحريضية

$$Z = \omega . L \qquad (4,68)$$

- مقياس الرسم الخطي:

$$Z = const\ .\omega \qquad (4,69)$$

أي أن الممانعة التحريضية تتناسب طرداً مع التردد، وتمثل العلاقة السابقة خطوطاً مستقيمة تمر في مركز الإحداثيات كما في الشكل (٤-٢٦-أ).

- مقياس الرسم اللوغاريتمي:

$$\log(Z) = \log(2.\pi.f.L) = \log(2.\pi.L) + \log(f) \qquad (4,70)$$

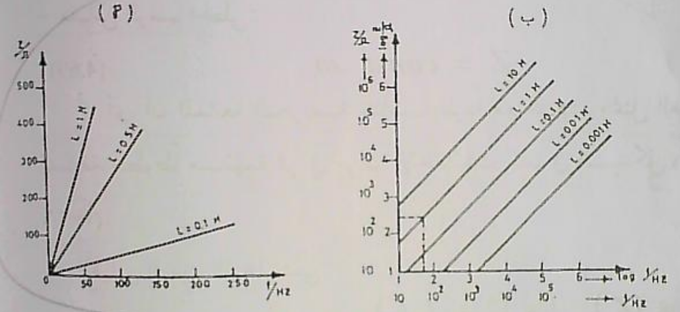
وهذه المعادلة تمثل معادلة مستقيم

$$Y = X + b \qquad (4,71)$$

وهي معادلة خط مستقيم ميله (+1) متزايد ووسيطه L . بتغيير الوسيط L يزاح الخط المستقيم بشكل موازٍ للخط المستقيم المار من مركز

الإحداثيات كما في الشكل (٤-٢٦-ب)، أما بالنسبة لزاوية الطور فـلا توجد لها علاقة بالتردد وهي تساوي دائماً $+90^{\circ}$.

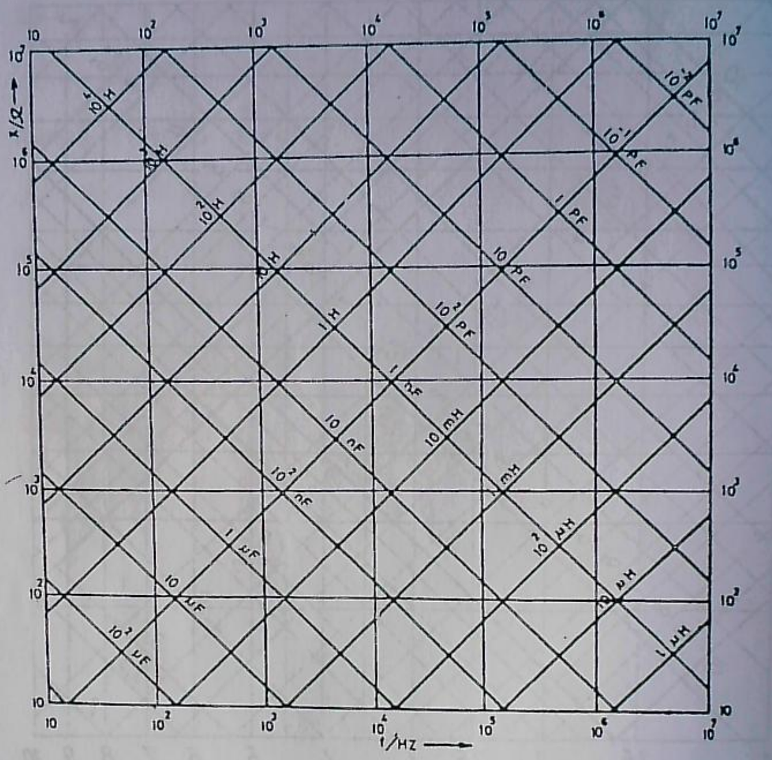
يمكن أن نحصل على المخطط العام لحساب الممانعة السعوية والممانعة التحريضية بعلاقة التردد، وذلك بجمع المخططين السابقين المبينين في الشكلين (٤-٢٥-ب) و (٤-٢٦-ب) ويصبح المخطط كما هو مبين في الشكل(٤-٢٧).[9]



L = 1 H ⟶ Z = ω L = 314 Ω

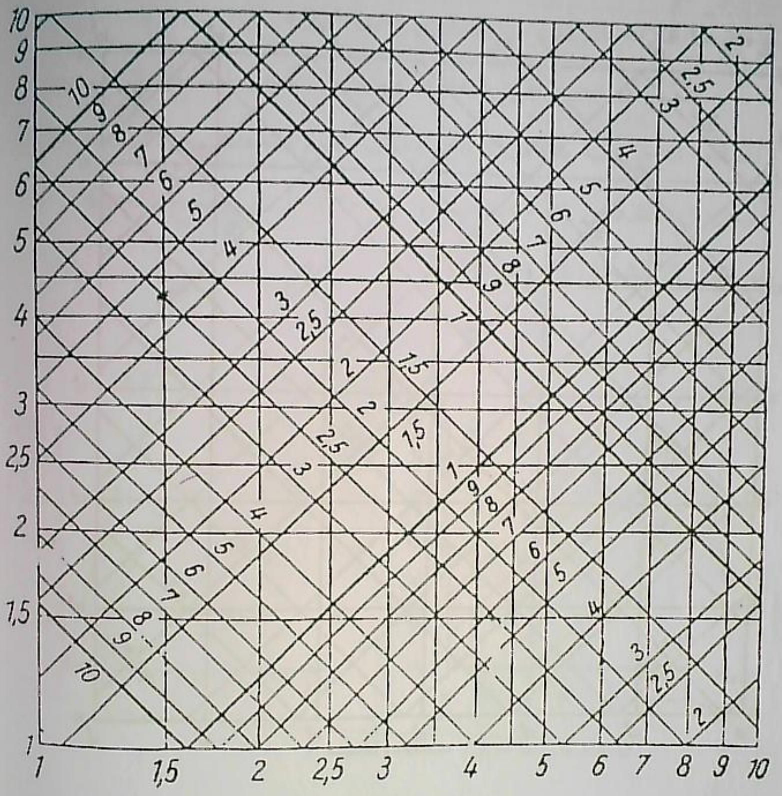
الشكل(٤-٢٦) علاقة الممانعة التحريضية بالتردد أ- مقياس رسم خطي

ب- مقياس رسم لوغاريتمي



الشكل(٤-٢٧) مخطط الممانعة العام كتابع للتردد

نبين في الشكل (٤-٢٨) مخطط الممانعة الدقيق ،وهو تقسيم دقيق يصلح لأي مربع من مربعات المخطط العام، ويساعد على تحديد قيمة الممانعة بدقة أفضل **[9]**.



الشكل(٤-٢٨) مخطط الممانعة الدقيق كتابع للتردد

مسألة (٤-٥):

المطلوب تحديد الممانعة للسعة $C = 250[PF]$ عند التردد $f = 1,5[KHZ]$.

الحل:

- نبدأ بتحديد X_c من المخطط العام المبين على الشكل (٤-٢٧) ونجد أن نقطة التقاطع بين العمود الصاعد من النقطة $f = 1,5[KHZ]$ مع الخط ذي الوسيط $C = 250[PF]$ تقع بين $X_c = 10^5......10^6[\Omega]$.

- ننتقل عندها إلى المخطط الدقيق المبين على الشكل (٤-٢٨)، ونبحث عن نقطة تقاطع العمود الصاعد من الوسيط 1,5 مع الخط المستقيم ذي الوسيط 2,5 فنحصل على القيمة 4,25 ، وبذلك تكون الممانعة السعوية $X_C = 4,25.10^5[\Omega]$.

٤-٥-٤ : علاقة الممانعة لثنائي الأقطاب R,C التسلسلي بالتردد:

لسهولة مناقشة علاقة الممانعة بالتردد من الأجدى في هذه الحالة تقريب نتيجة الحساب مرة عندما يكون التردد منخفضاً وأخرى عندما يكون التردد عالياً **[9]**.

$$\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega .c} \tag{4,72}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega .c}\right)^2} \tag{4,73}$$

- في الترددات العالية

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega .c}\right)^2} \tag{4,74}$$

$$R >> \frac{1}{\omega .c} \Rightarrow \omega .c.R >> 1 \tag{4,75}$$

وبالتالي:

$$Z \approx R\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega.c.R}\right)^2\right] \quad (4,76)$$

$$\omega.c.R \geq 3 \Rightarrow Z \leq R\left(1+\frac{1}{18}\right) \approx R \quad (4,77)$$

أي إذا قربنا $Z \approx R$ في المجال $\frac{1}{\omega.c} \leq \frac{R}{3}$ يكون الخطأ الناجم عن هذا التقريب $F \leq 5\%$.

– في الترددات المنخفضة

$$Z = \frac{1}{\omega.c}\sqrt{1+(\omega.c.R)^2} \quad (4,78)$$

$$R << \frac{1}{\omega.c} \Rightarrow \omega.c.R << 1 \quad (4,79)$$

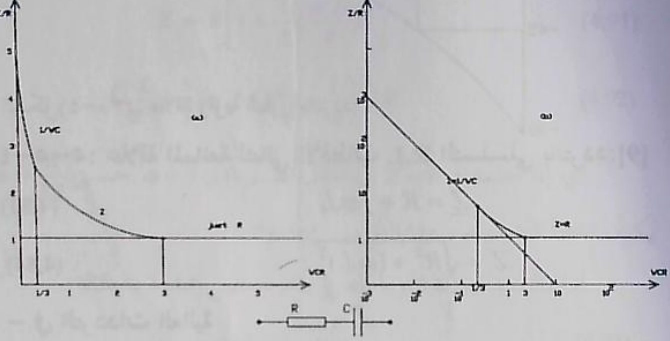
$$Z \approx \frac{1}{\omega.c}\left[1+\frac{1}{2}(\omega.c.R)^2\right] \quad (4,80)$$

$$\omega.c.R \leq \frac{1}{3} \Rightarrow Z \leq \frac{1}{\omega.c}\left(1+\frac{1}{18}\right) \approx \frac{1}{\omega.c} \quad (4,81)$$

أي إذا قربنا $Z \approx \frac{1}{\omega.c}$ في المجال $\frac{1}{\omega.c} \geq 3.R$ يكون الخطأ الناجم عن هذا التقريب $F \leq 5\%$.

من المخطط نلاحظ أنه في المجال الترددي $\omega.c.R = \frac{1}{3}$ حتى $\omega.c.R = 3$ يتم الانتقال من منحنٍ يتعلق بالتردد $Z = \frac{1}{\omega.c}$ إلى منحنٍ لا يتعلق بالتردد $Z = R$.

في منتصف المجال الترددي تقريباً يقع التردد الذي يتساوى عنـــده الجزء الحقيقي مع الجزء التخيلي للممانعة، بينما خارج المجـــال التـــرددي $\omega = \frac{1}{3.c.R}$ حتى $\omega = \frac{3}{c.R}$ تعمل الدارة و كأنها مؤلفة من عنصر توصـــيل واحد C أو R .



الشكل(٤-٢٩) علاقة الممانعة بالتردد لثنائي أقطاب R,C (خطي ، لوغاريتمي)

أما بالنسبة لعلاقة زاوية الطور بالتردد فهي محددة بالعلاقة:

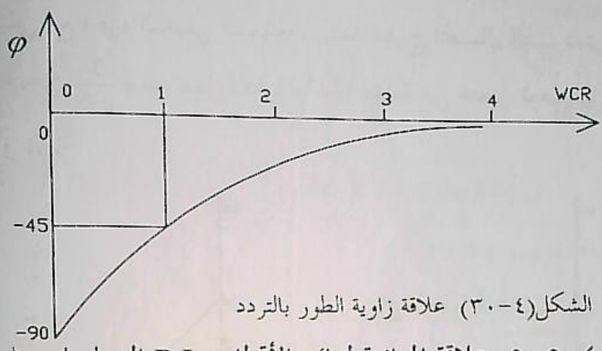
$$\varphi = -tg^{-1}\frac{1}{\omega.c.R} \qquad (4,82)$$

$$\omega.c.R = 0 \Rightarrow \varphi = -90$$

$$\omega.c.R = 1 \Rightarrow \varphi = -45$$

$$\omega.c.R = \infty \Rightarrow \varphi = -0$$

ومن الشكل (٤-٣٠) نلاحظ أن $\varphi = -90$ عند التردد $\omega = 0$ ثم تتناقص قيمتها تتناهى إلى الصفر عند التردد $\omega = \infty$



الشكل(٤-٣٠) علاقة زاوية الطور بالتردد

٤-٥-٥: علاقة الممانعة لثنائي الأقطاب R,L التسلسلي بالتردد:[9]

$$\underline{Z} = R + j\omega.L \tag{4,83}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega.L)^2} \tag{4,84}$$

- في الترددات العالية

$$Z = \omega.L\sqrt{1 + (\frac{R}{\omega.L})^2} \tag{4,85}$$

$$R << \omega.L \Rightarrow \frac{\omega.L}{R} >> 1 \tag{4,86}$$

$$Z \approx \omega.L\left[1 + \frac{1}{2}(\frac{R}{\omega.L})^2\right] \tag{4,87}$$

$$\frac{\omega.L}{R} \geq 3 \Rightarrow Z \leq \omega.L\left(1 + \frac{1}{18}\right) \approx \omega.L \tag{4,88}$$

أي إذا اعتمدنا $Z \approx \omega.L$ في المجال $\omega = \frac{3.R}{.L}$ حتى $\omega = \infty$ يكـون الخطأ الناجم عن هذا التقريب $F \leq 5\%$.

– في الترددات المنخفضة

$$Z = R\sqrt{1 + (\frac{\omega.L}{R})^2} \qquad (4,89)$$

$$R >> \omega.L \Rightarrow \frac{\omega.L}{R} << 1 \qquad (4,90)$$

$$Z \approx R\left[1 + \frac{1}{2}(\frac{\omega.L}{R})^2\right] \qquad (4,91)$$

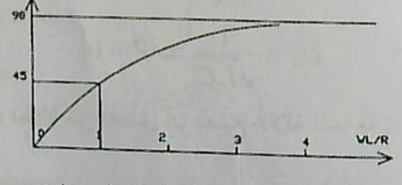
$$\frac{\omega.L}{R} \le \frac{1}{3} \Rightarrow Z \le R\left(1+\frac{1}{18}\right) \approx R \qquad (4,92)$$

أي إذا اعتمدنا $Z \approx R$ في المجال الترددي $\omega = 0$ حتى $\omega = \frac{R}{3.L}$ يكون الخطأ الناجم عن هذا التقريب $F \le 5\%$.

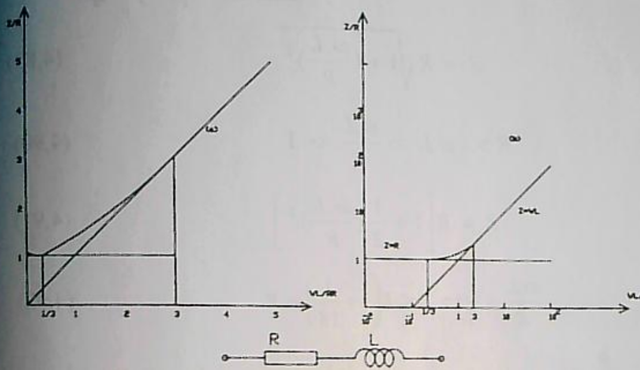
أما بالنسبة لعلاقة زاوية الطور بالتردد فهي محددة بالعلاقة:

$$\varphi = tg^{-1}\frac{\omega.L}{R} \qquad (4,93)$$

$$\frac{\omega.L}{R} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$
$$\frac{\omega.L}{R} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$
$$\frac{\omega.L}{R} = \infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$



الشكل(٤-٣١) علاقة زاوية الطور بالتردد



الشكل(٤-٣٢) علاقة الممانعة بالتردد لثنائي أقطاب R,L (خطي ، لوغاريتمي)

٤-٥-٦: علاقة الممانعة لثنائي الأقطاب L,C التسلسلي بالتردد:[9]

$$\underline{Z} = j\omega.L + \frac{1}{j\omega.c} \qquad (4,94)$$

$$Z = \left|\omega.L - \frac{1}{\omega.c}\right| \qquad (4,95)$$

$$\omega = 0 \Rightarrow Z = \infty$$

$$\omega = \infty \Rightarrow Z = \infty$$

$$\omega.L = \frac{1}{\omega.c} \Rightarrow$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L.C}} \Rightarrow Z = 0$$

في هذه الحالة من المجدي أن نصيغ علاقة الممانعة Z بالتردد النسبي $\frac{\omega}{\omega_o}$

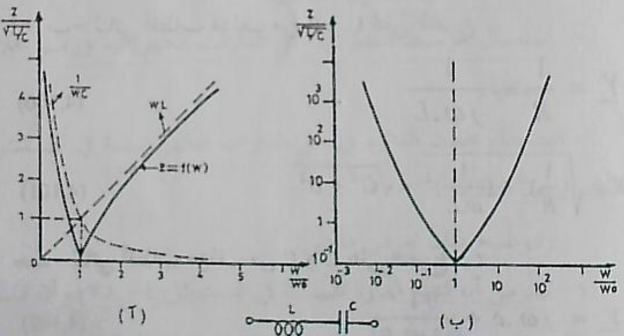
$$Z = \left|\omega . L - \frac{1}{\omega . c}\right|$$

$$= \left|\omega_o . L . \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{1}{\omega_o . c} . \frac{\omega_o}{\omega}\right|$$

$$= \omega_o . L \left|\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right| \qquad (4,96)$$

$$= \sqrt{\frac{L}{C}} . \left|\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{Z}{\sqrt{L/C}} = \left|\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right| \qquad (4,97)$$



الشكل(٤-٣٣) علاقة الممانعة بالتردد لثنائي أقطاب L,C (خطي ، لوغاريتمي)

أما بالنسبة لعلاقة زاوية الطور بالتردد فهي كما يلي:

- $\omega_o > \omega > 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$ أي $\omega.L < \frac{1}{\omega.c}$ سعوي
- $\omega = \omega_o \Rightarrow \varphi = 0$
- $\infty > \omega > \omega_o \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ أي $\omega.L > \frac{1}{\omega.c}$ تحريضي

٤-٥-٧: علاقة الممانعة لثنائي الأقطاب L,C أو R,C أو R,L التفرعي بالتردد:[9]

أ- ثنائي أقطاب مؤلف من R و C على التفرع

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega.c \qquad (4,98)$$

$$Y = \sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\omega.C)^2} = \sqrt{G^2 + B^2} \qquad (4,99)$$

ب- ثنائي أقطاب مؤلف من R و L على التفرع

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega.L} \qquad (4,100)$$

$$Y = \sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\frac{1}{\omega.L})^2} = \sqrt{G^2 + B^2} \qquad (4,101)$$

جـ- ثنائي أقطاب مؤلف من C و L على التفرع

$$\underline{Y} = j\omega.c + \frac{1}{j\omega.L} \qquad (4,102)$$

$$Y = \left|\omega.c - \frac{1}{\omega.L}\right| \qquad (4,103)$$

بمقارنة هذه المعادلات مع المعادلات التي حصلنا عليها عند حساب $\underline{Z}$ في التوصيل التسلسلي نرى أن المعادلات متكافئة تماماً وبذلك يمكن تحويل كل معادلة إلى الأخرى إذا استبدلنا

$$\underline{Z} \Leftrightarrow \underline{Y}$$

$$L \Leftrightarrow C$$

$$R \Leftrightarrow G$$

ويسري مفعول جميع الحسابات وجميع الحلول البيانية للدارات التسلسلية على حسابات السماحيات للدارات التفرعية

٤-٦: الحل البياني العقدي للدارات الكهربائية الخطية :[11]

نعالج في هذا الفصل طرقاً لحل الدارات الكهربائية الخطية في المستوي العقدي وهي:

- قلب الأشعة في المستوي العقدي
- استعمال الوسيط المتغير في حل الدارات الكهربائية ورسم محلات هندسية.
- استخدام مخطط الدائرة في حل الدارات الكهربائية في المستوي العقدي بعد اشتقاقه.

ولتوضيح ذلك نعرض ما يلي:

١- نفترض أنه لدينا الدارة المبينة في الشكل(٤- ٣٤) وأن قيم عناصرها معروفة، والمطلوب رسم شعاع الممانعة $\underline{Z}_{AB}$ لتردد ثابت .

قيمة الممانعة $\underline{Z}_{AB}$ وهي:

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{2,3} \qquad (4,104)$$

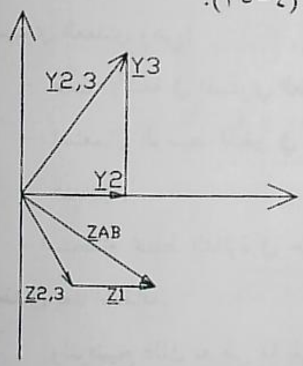
لهذا الغرض نجمع أولاً الشعاعين $\underline{Y}_2$ و $\underline{Y}_3$ جمعاً شعاعياً ، وشعاع حاصل الجمع هو :

$$\underline{Y}_{2,3} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \qquad (4,105)$$

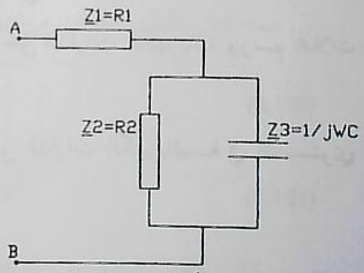
بعد ذلك نحدد شعاع مقلوب القيمة الشعاعية $\underline{Y}_{2,3}$ أي نحدد الممانعة $\underline{Z}_{2,3}$ وهي:

$$\underline{Z}_{2,3} = \frac{1}{\underline{Y}_{2,3}} \qquad (4,106)$$

وأخيراً نجمع الشعاعين $\underline{Z}_{2,3}$ و $\underline{Z}_1$ فنحصل على شعاع الممانعة $\underline{Z}_{AB}$ للدارة المطلوبة والمبين في الشكل (٤-٣٥).



الشكل(٤-٣٥)



الشكل(٤-٣٤)

٢- عند تغيير التردد يتغير طول الشعاع $\underline{Z}_{AB}$ وتتغير زاوية طوره φ. وإذا غيرنا التردد (الوسيط) في مجال ترددي معين ورسمنا في محاور الإحداثيات

لكل المخططات الشعاعية وحددنا المنحني الذي ترسمه نهاية الشعاع $\underline{Z}_{AB}$ نحصل عندها على ما يسمى المحل الهندسي.

٣- يتم تصميم المحل الهندسي بالطريقة نفسها التي يتم فيها تصميم المخطط الشعاعي.

نفترض أن المطلوب هو تحديد المحل الهندسي للدارة المبينة في الشكل(٤ -٣٤)، أي المنحني الذي ترسمه نهاية الشعاع $\underline{Z}_{AB}$ عندما يتغير التردد من الصفر إلى اللانهاية.

نبتدئ برسم المحل الهندسي للشعاع $\underline{Y}_3(\omega)$ في المجال الترددي المطلوب، ثم نضيف له شعاعاً ذا قيمة $\underline{Y}_2$. نقلب المحل الهندسي الذي حصلنا عليه، ونضيف له شعاعاً غير متعلق بالتردد $\underline{Z}_1$ (أي نضيف الشعاع لكل نقطة من نقاط المحل الهندسي) فنحصل على المحل الهندسي لممانعة الدارة المطلوبة عندما يتغير التردد من الصفر إلى اللانهاية. بعد رسم المحل الهندسي لممانعة الدارة يمكن رسم المحل الهندسي لكل من التيار والتوتر عند مأخذي الدارة.

إذا تمت تغذية الدارة بتيار ذي مطال ثابت ولكنه ذو تردد متغير كان المحل الهندسي لهبوط التوتر الكلي على مأخذي الدارة مساوياً المحل الهندسي $\underline{Z}(\omega)$ بعد ضربه بعامل ثابت أي:

$$\underline{U}(\omega) = \underline{I}.\underline{Z}(\omega) = const.\underline{Z}(\omega) \qquad (4,107)$$

أما إذا تمت المحافظة على مطال التوتر ثابتاً ، عندها نحصل على المحل الهندسي للتيار الكلي عند مأخذي الدارة $\underline{I}(\omega)$ من المحل الهندسي الخاص بالسماحية العقدية $\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(\omega)}$ ، أي:

$$I(\omega) = \underline{U}.\underline{Y}(\omega) = const.\underline{Y}(\omega) \qquad (4,108)$$

ومنه يتبين أن قلب المحل الهندسي الخاص بممانعة الدارة $\underline{Z}(\omega)$ ضروري .

٤- مخطط الدائرة: هو عبارة عن مجموعة محلات هندسية يمكن بمساعدتها تحديد الممانعة الكلية للدارة كما يمكن استخدامه في حل مطالب أخرى.

٤-٦-١: القلب [11]:

تسمى القيمة العقدية $\underline{C} = \frac{\underline{B}^2}{\underline{A}}$ مقلوب القيمة العقدية $\underline{A}$ بأس قيمته $\underline{B}^2$ و $\underline{B}^2$ هي أس القلب.

$$C.e^{j\gamma} = \frac{B^2.e^{j2\beta}}{A.e^{j\alpha}} \qquad (4,109)$$

ومنه يكون مطال وزاوية طور المقلوب:

$$C = \frac{B^2}{A}$$

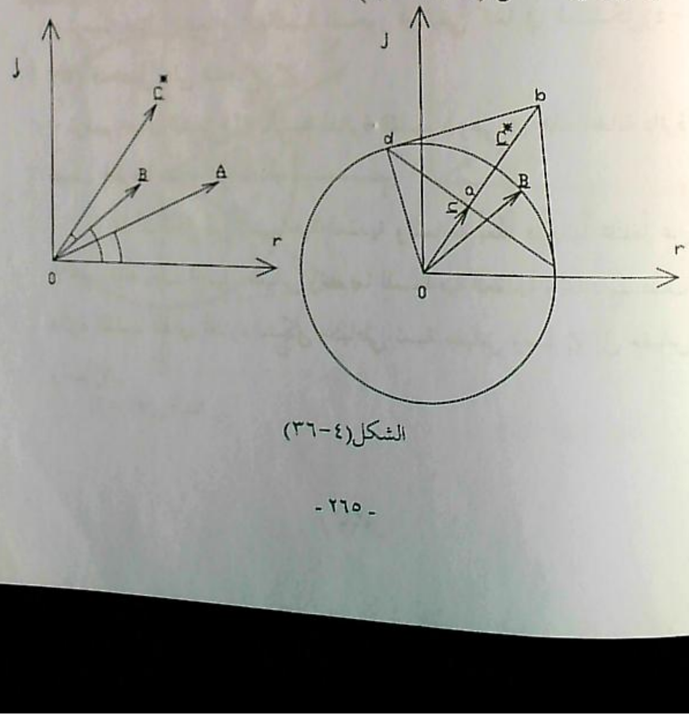
$$\gamma = 2\beta - \alpha \qquad (4,110)$$

مما سبق نتعرف على طريقة تصميم الشعاع $\underline{C}$ من شعاعين معطيين $\underline{A}$ و $\underline{B}$.

١- **تحديد زاوية طور الشعاع $\underline{C}$**: نرسم خيال الشعاع $\underline{A}$ بالنسبة للشعاع $\underline{B}$. والخيال هو شعاع $\underline{C}^{*}$ زاوية طوره كما في الشكل(٤-٣٦-ا) هي:

$$\gamma = 2\beta - \alpha$$

٢- **تحديد مطال الشعاع $\underline{C}$**: نرسم دائرة كما في الشكل (٤-٣٦-ب) مركزها في مركز الإحداثيات ونصف قطرها B ، ثم نرسم خيال الشعاع $\underline{C}^{*}$ الذي تم التوصل إليه في الشكل(٤-٣٦-أ) بالنسبة لهذه الدائرة. لهذا الغرض نرسم من نهاية الشعاع $\underline{C}^{*}$ مماسين للدائرة ، يقطع الخط الواصل بين نقطتي التماس مع الدائرة الشعاع $\underline{C}^{*}$ بزاوية قائمة محدداً عليه الطول $\frac{B^2}{A}$. ويمكننا إثبات ذلك من المثلثين المتشابهين oad و obd كما هو مبين في الشكل (٤-٣٦- ب).



الشكل(٤-٣٦)

إلا أنه من الممكن أن يكون الشعاع $\underline{A}$ أقصر من الشعاع $\underline{B}$ أو مساوياً له في الطول.

عندما يكون الشعاع $\underline{A}$ أقصر من الشعاع $\underline{B}$ فإن عملية القلب تتم خارج الدائرة ، وتبتدئ عملية التصميم البياني للشعاع $\underline{C}$ برسم عمود على الشعاع $\underline{C}^*$ يمر بنهايته، ويحدد على الدائرة نقطتي التماس.

وعندما يكون طول الشعاع $\underline{A}$ مساوياً لطول الشعاع $\underline{B}$، فإن الشعاع $\underline{C}$ ينتهي عند دائرة القلب وبذلك يتحدد طوله.

في أغلب الأحيان تكون قيمة الشعاع $\underline{B}$ مساوية الواحد وبالتالي:

$$\underline{B}=1 \quad \Rightarrow \underline{Y}=\frac{1}{\underline{Z}} \quad , \quad \gamma=-\varphi \qquad (4,111)$$

في هذه الحالة:

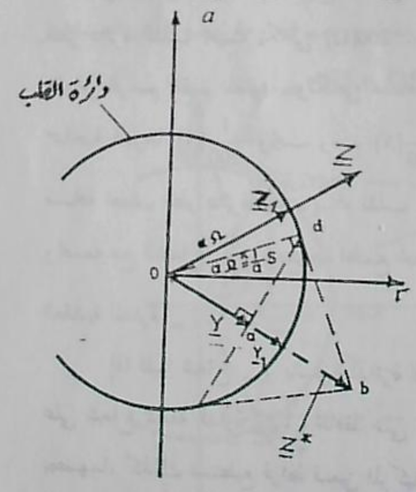
- نرسم خيال الشعاع $\underline{Z}$ بالنسبة للمحور الحقيقي كما في الشكل(٤-٣٧) فنحصل على الشعاع $\underline{Z}^*$.
- نرسم خيال الشعاع $\underline{Z}^*$ بالنسبة لدائرة القلب ، وهي في هذه الحالة دائرة نصف قطرها مساوٍ الواحد .

بما أن لكل من السماحية العقدية والممانعة بعداً فيزيائياً مختلفاً عن الآخر، فإنه يجب اختيار مقياس رسم ما للسماحية العقدية ويحدد نصف دائرة القلب الذي نختاره بشكل اعتباطي نسبة مقياس رسم $\underline{Z}$ إلى مقياس رسم $\underline{Y}$.

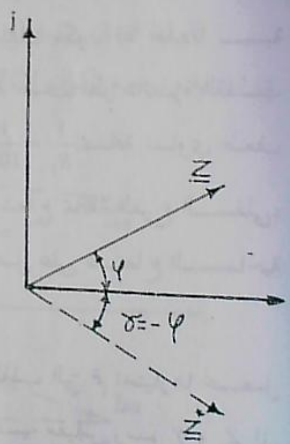
وإذا اخترنا نصف قطر الدائرة مكافئاً لطـول الـشعاع $\underline{Z}_1$، أي $Z_1 = a[\Omega]$، يكـون عنـدها للـشعاع $\underline{Y}_1$ الطـول نفـسه، أي $\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{a}[S]$، إذ بموجب القاعدة التي وردت فيما سبق (تحـافظ الأشعة التي تنتهي على دائرة القلب على طولها عند قلبها بالنـسبة لهـذه الدائرة) الشكل(٤-٣٨) .

المسافة od مساوية قيمة $Z_1 = a[\Omega]$ بالنسبة لشعاع المقاومـة ومـساوية قيمة $Y_1 = \frac{1}{a}[S]$ بالنسبة لشعاع السماحية.

$$\frac{\overline{oa}}{\overline{od}} = \frac{\overline{od}}{\overline{ob}} \Rightarrow \frac{\underline{Y}}{\frac{1}{a}} = \frac{a}{\underline{Z}} \Rightarrow \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \qquad (4,112)$$



الشكل(٤-٣٨)



الشكل(٤-٣٧)

مسألة (٤-٦):

لدينا الدارتان المبينتان في الشكل(٤-٣٩) والمطلوب:

١- حدد بيانياً الممانعة $\underline{Z}_{ah}$ ومركبتها الحقيقية والتخيلية وذلك لتردد معين.

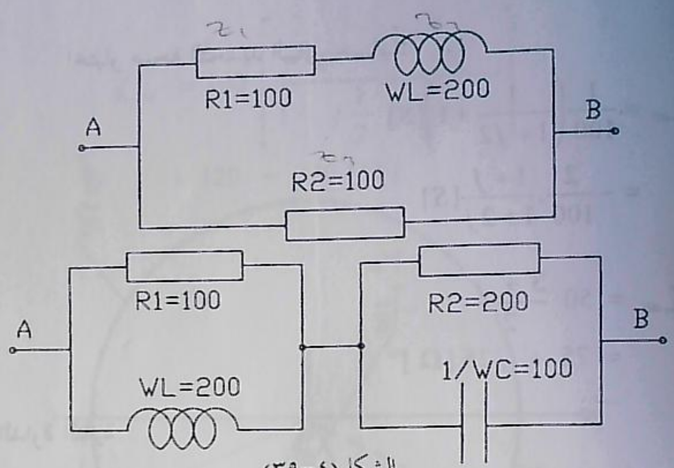
٢- تأكد من صحة النتائج بالحساب العقدي **[11]**.

الحل:

الدارة الأولى:

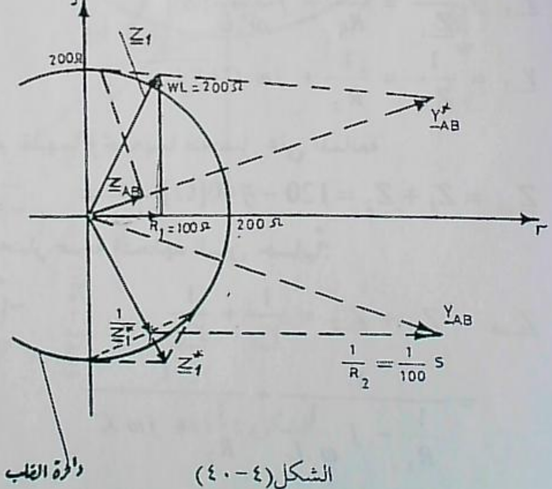
نرسم بموجب مقياس رسم الشعاعين $R_1,\ j\omega.L$ وبنتيجة الجمع الشعاعي نحصل على ممانعة الفرع السفلي من الدارة (لقد اخترنا نصف قطر دائرة القلب بحيث يكافئ $200[\Omega]$. بذلك نكون قد حددنا نسبة مقياس الرسم للقيم المقلوبة. وتكافئ مسافة نصف قطر دائرة القلب سماحية قدرها $\frac{1}{200}[S]$ ويجب رسم $\frac{1}{R_2}=\frac{1}{100}[S]$ بمسافة تساوي ضعف مسافة نصف قطر دائرة القلب). ثم نقلب شعاع ممانعة الفرع السفلي، ونجمعه مع الشعاع $\frac{1}{R_2}$، وبنتيجة الجمع نحصل على شعاع السماحية العقدية للدارة $\underline{Y}_{ah}$.

إذا قلبنا شعاع $\underline{Y}_{ah}$ بالنسبة لدائرة القلب التي تم اختيارها نحصل على شعاع ممانعة الدارة $\underline{Z}_{ah}$، ونحافظ على نسبة مقياس رسم $\underline{Y}$ و $\underline{Z}$ إلى بعضهما. كذلك نستطيع قراءة قيمتي المركبة الحقيقية والتخيلية للممانعة $\underline{Z}_{ah}$. الشكل(٤-٤٠)



الشكل(٤-٣٩)

لقراءة قيمة $\underline{Z}_{ab}$ يصلح مقياس رسم المقاومة نفسه الذي استعمل في البداية وبموجبه تكون $\underline{Z}_{ab} = 75 + j25[\Omega]$.



الشكل(٤-٤٠)

اختبار صحة التحديد البياني حسابياً:

$$\underline{Y}_{ab} = \frac{1}{100}\left(\frac{1}{1+j2}+1\right)[S]$$

$$= -\frac{2}{100}\cdot\frac{1+j}{1+2j}[S]$$

$$\underline{Z}_{ab} = 50\ \frac{3+j}{2}$$

$$= 75 + j25\,[\Omega]$$

الدارة الثانية:

نبتدئ هنا بالسماحيات الإفرادية $\underline{Y}_1$ و $\underline{Y}_2$ وذلك بقلب أشـعة الممانعات الإفرادية $\underline{Z}_1$ و $\underline{Z}_2$ للدارتين التفرعيتين الشكل(٤-٤١)

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1} - j\frac{1}{\omega.L}[S]$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2} + j\omega.C[S]$$

ثم نقلبهما ونجمعهما فنحصل على الممانعة

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 120 - j40[\Omega]$$

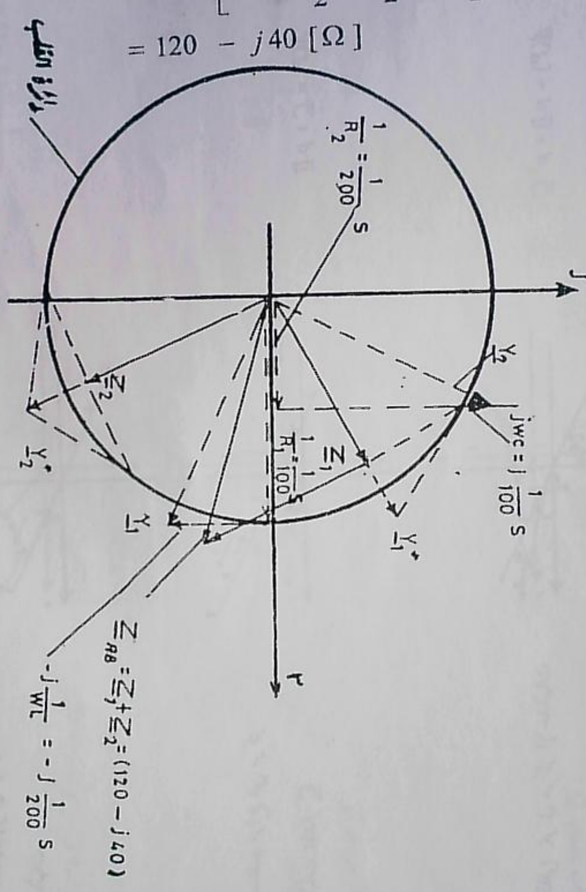
اختبار صحة التحديد البياني حسابياً:

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_2}$$

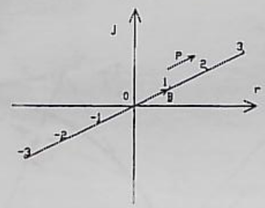
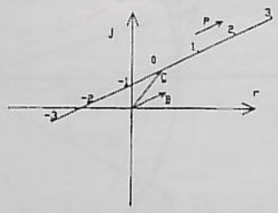
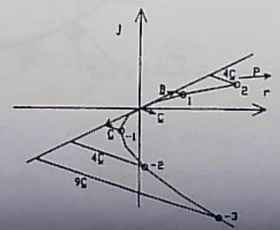
$$= \frac{1}{\frac{1}{R_1} - j\frac{1}{\omega.L}} + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega.C}$$

$$\underline{Z}_{ab} = 100\left[\frac{1}{1-j\dfrac{1}{2}}+\frac{1}{\dfrac{1}{2}+j}\right]$$

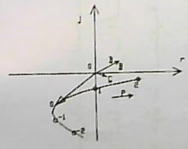
$$= 120 - j40\ [\Omega]$$



الشكل(٤-٤١)

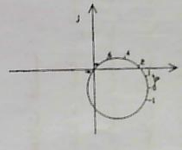
نوع المنحني	المحل الهندسي	الصياغة الرياضية	الطراز
خط مستقيم يمر في مركز الإحداثيات		$\underline{A}(P) = p.\underline{B}$	I
خط مستقيم مزاح عن مركز الإحداثيات بمقدار $\underline{C}$		$\underline{A}(P) = \underline{C} + p.\underline{B}$	II
قطع مكافئ يمر في مركز الإحداثيات		$\underline{A}(P) = p.\underline{B} + p^2.\underline{C}$	III

IV $\underline{A}(P) = \vartheta + p.\underline{B} + p^2.\underline{C}$



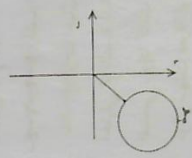
قطع مكافئ مزاح عن مركز
الإحداثيات بمقدار $\underline{\vartheta}$

V $\underline{A}(P) = \frac{1}{\underline{C} + p.\underline{B}}$



دائرة تمر من مركز
الإحداثيات

VI $\underline{A}(P) = \vartheta + \frac{1}{\underline{C} + p.\underline{B}} = \frac{\underline{E} + p.\underline{F}}{\underline{C} + p.\underline{B}}$



دائرة مزاحة عن مركز
الإحداثيات بمقدار $\underline{\vartheta}$

الشكل (٤-٢٤)

٤-٦-٢: المحلات الهندسية :[11]

إذا كان لدينا قيمة عقدية $\underline{A} = A_1 + jA_2$ وتغـيرت قيمة A_1 أو قيمة A_2 ، عندها يرسم رأس الشعاع $\underline{A}$ منحنياً بيانياً نـسميه المحل الهندسي. الشكل (٤-٤٢) يبين المحلات الهندسية المميزة ومعادلاتها العقدية. وقـد رمز للمتغير في المعادلات بالرمز P ، ويتضح من الشكل مباشرة تـصميم المحل الهندسي للحالات من I إلى IV وسنوضح فيما بعد طريقة تـصميم الحالتين V و VI .

٤-٦-٢-١: قلب المحلات الهندسية :

إذا رسمنا خيال عدد من أشعة محل هندسـي بالنـسبة للمحـور الحقيقي ثم بالنسبة لدائرة قلب عندها نحصل على أشعة مقلـوب المحـل الهندسي . وإذا كانت المحلات الهندسية المراد قلبها خطوطاً مـستقيمة أو دوائر سهلت معرفة قواعد القلب التالية تصميم مقلوب المحـل الهندسـي تسهيلاً كبيراً.

٤-٦-٢-١-١: قاعدة القلب الأولى :

ينتج قلب خط مستقيم يمر من مركز الإحداثيات خطاً مـستقيماً يمر من مركز الإحداثيات.

$$\frac{1}{\underline{A}} = \frac{1}{P.\underline{B}} = \frac{\underline{B}^*}{P.\underline{B}.\underline{B}^*} = \frac{1}{B^2}.\frac{1}{P}.\underline{B}^* \qquad (4,113)$$

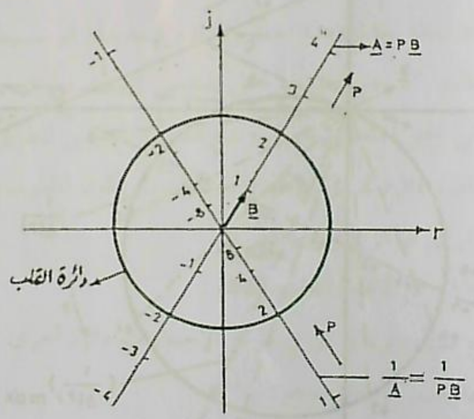
والنتيجة هي محل هندسي من الطراز I كما في الشكل (٤- ٤٣)

نرسم منحني خيال المحل الهندسي $\underline{A}$ بالنسبة للمحور الحقيقي (بذلك نكون قد حددنا زوايا طور جميع أشعة مقلوب المحل الهندسي).

نختار مقياس رسم الأشعة المقلوبة ، أي نختار نصف قطر دائرة القلب، في الشكل (٤-٤٣) تمر دائرة القلب في النقطة $P=2$ ، ويحافظ الشعاع المكافئ لـ $P=2$ على طوله بعد قلبه.

بعد قلب الشعاع المكافئ لـ $P=2$ (يساوي طوله ضعف طول الشعاع السابق $P=2$) يصبح طوله مساوياً نصف طول الشعاع المكافئ لـ $P=2$.

بعد قلب الشعاع المكافئ لـ $P=1$ يساوي طوله مساوياً ضعف طول الشعاع المكافئ لـ $P=2$. تقع $P=\infty$ في مركز الإحداثيات .



الشكل(٤-٤٣)

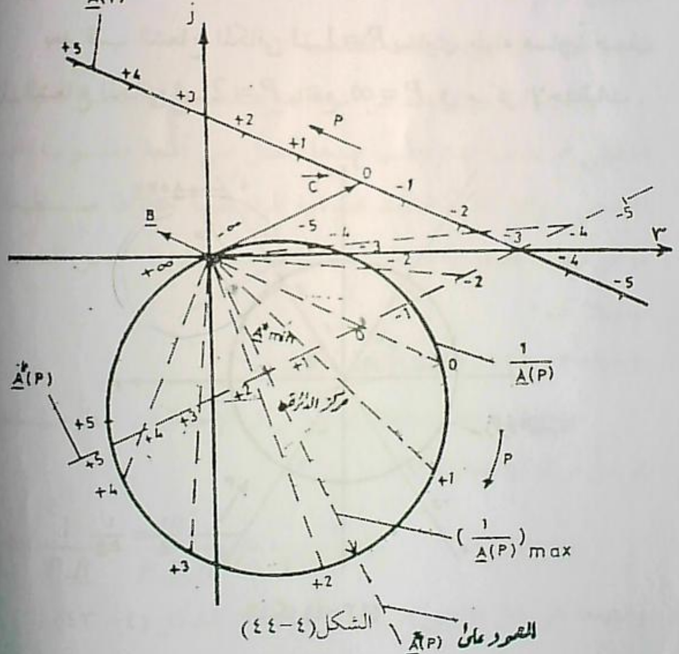
٤-٦-٢-١-٢: قاعدة القلب الثانية :

ينتج قلب خط مستقيم لا يمر من مركز الإحداثيات دائرة تمر من مركز الإحداثيات. والمقلوب هو:

$$\frac{1}{\underline{A}}=\frac{1}{\underline{C}+P.\underline{B}} \qquad (4,114)$$

والنتيجة هي محل هندسي من الطراز V كما في الشكل (٤- ٤٤)

- نرسم خيال المحل الهندسي بالنسبة للمحور الحقيقي (بـذلك نكون قد حددنا زوايا طور جميع أشعة مقلوب المحل الهندسي).



الشكل(٤-٤٤)

- بما أنه معروف لدينا بأن عملية القلب تنتج دائرة تمر في مركز الإحداثيات نحتاج فقط إلى تحديد مكان مركز هذه الدائرة على خيال المحل الهندسي . ويجب أن يقع مركز الدائرة على العمود النازل من مركز الإحداثيات على خيال المحل الهندسي حيث ينطبق عليه $\underline{A}^{*}_{min}$ وبالتالي $\left(1/\underline{A}\right)_{max}$ والتي يحددها مقياس الرسم المعتمد إلى قطر الدائرة، وبذلك يمكن رسم الدائرة.

- نحدد قيم الوسيط P على الدائرة من قيم الوسيط P على المحل الهندسي $\underline{A}^{*}$ بالشكل التالي:

نصل بين قيمة الوسيط P على المحل الهندسي $\underline{A}^{*}$ ومركز الإحداثيات.

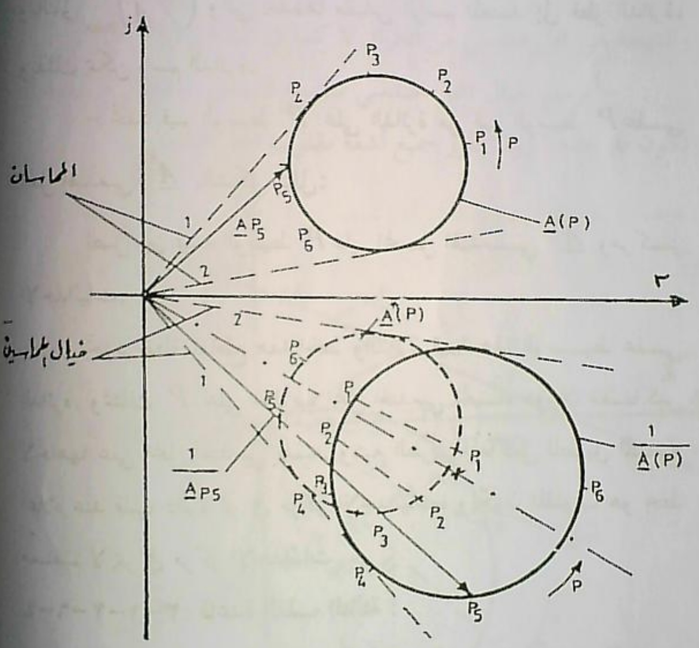
تحدد نقطة تقاطع هذا الخط والدائرة قيمة هذا الوسيط على الدائرة. وتمتلك P على مقلوب المحل الهندسي اتجاه دوران معاكس لاتجاهها على المحل الهندسي نفسه. ونتبع الطريق المعاكس للطريق المتبع أعلاه عند قلب دائرة تمر في مركز الإحداثيات، ويكون المقلوب هو خط مستقيم لا يمر في مركز الإحداثيات.

٤-٦-٢-١-٣: قاعدة القلب الثالثة :

ينتج قلب دائرة لا تمر في مركز الإحداثيات دائرة أخرى لا تمر في مركز الإحداثيات. والمقلوب هو:

$$\frac{1}{\underline{A}} = \frac{\underline{C} + P.\underline{F}}{\underline{E} + P.\underline{B}} \qquad (4,115)$$

والنتيجة هي محل هندسي من الطراز VI كما في الشكل (٤- ٤٥)



الشكل(٤-٤٥)

- نرسم خيال المحل الهندسي بالنسبة للمحور الحقيقي (بذلك نكون قد حددنا زوايا طور جميع أشعة مقلوب المحل الهندسي). الدائرة $\underline{A}^{*}(P)$

- يجب أن يقع مقلوب المحل الهندسي ضمن مماسي الدائرة الممثلة لخيال المحل الهندسي $\underline{A}^{*}(P)$ المارين في مركز الدائرة، ويقع مركز مقلوب الدائرة على المنحني المنطلق من مركز الإحداثيات والمار في مركز خيال الدائرة. وتتوقف قيمة قطر مقلوب الدائرة (أي مكان مركز مقلوب الدائرة على المنحني المشار إليه) على مقياس الرسم المعتمد.

- ننقل قيم نقاط الوسيط P من خيال الدائرة إلى مقلوب الدائرة. ويصبح أقصر شعاع في المحل الهندسي للدائرة نفسها أطول شعاع في المحل الهندسي لمقلوب الدائرة، انظر على سبيل المثال موقع نقطتي الوسيط P_1 و P_6 في $\underline{A}^{*}(P)$ وفي $\frac{1}{\underline{A}(P)}$

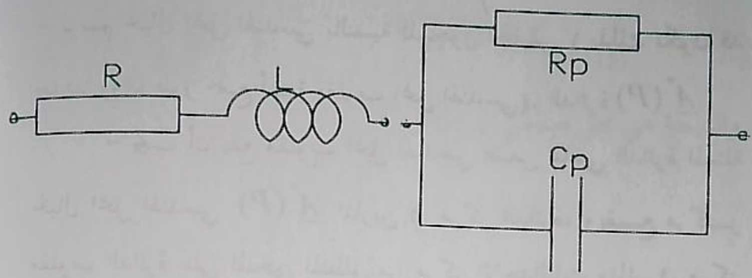
مسألة (٤-٧):

لدينا الدارتان المبينتان في الشكل(٤-٤٦) والمطلوب رسم المحلات الهندسية للممانعة $\underline{Z}_{ab}$ و للسماحية $\underline{Y}_{ab}$ عندما تتغير:

١- $f = 0.........\infty$.

٢- $R = 0.........\infty$.

وبيان قيم الوسيط على المحلات الهندسية ، ومقارنة المحلات الهندسية الأربعة مع بعضها.



الشكل(٤-٤٦)

طريقة الحل:

الدارة الأولى:

١- $f = 0.........\infty$

- نبتدئ برسم الشعاع R ونضيف إليه الشعاع $j\omega.L$ الذي يتغير طوله بتغير التردد فنحصل على المحل الهندسي للممانعة $\underline{Z}_{ab}$.

- نقلب المحل الهندسي $\underline{Z}_{ab}$ فنحصل على المحل الهندسي للسماحية $\underline{Y}_{ab}$.

- لكي نتمكن من تحديد الوسيط f أو ω بشكل مجدٍ ننسب القيمة المتغيرة إلى تردد زاوي ثابت، مثلاً

$$\omega_1.L = R \quad \Rightarrow \omega_1 = \omega_{45} = \frac{L}{R}$$

يسمى التردد f_{45} التردد 45^0 نظراً لأن الشعاع $\underline{Z}_{ab}$ يشكل مع المحور الحقيقي عند هذا التردد زاوية قدرها 45^0 ، عندها يكون التردد الزاوي النسبي $\eta = \frac{\omega}{\omega_{45}}$.

$$\underline{Z}_{ab} = R + j\omega.L = R + j\omega_1.L.\frac{\omega}{\omega_1}$$

إذا اعتبرنا أن

$$\omega_1.L = R \quad \Rightarrow \omega_1 = \omega_{45}$$

تصبح الممانعة

$$\underline{Z}_{ab} = R\left(1 + j\eta\right)$$

وهو محل هندسي من الطراز II أي خط مستقيم موازٍ للمحور التخيلي حيث $\eta = 0 ....\infty$ كما في الشكل (٤-٤٧-أ)

- بموجب قانون القلب الثاني ينتج قلب الخط المستقيم الموازي للمحور التخيلي نصف دائرة تمر في مركز الإحداثيات ويقع مركزها على المحور الحقيقي، ويكافئ قطر الدائرة $\frac{1}{R}$. بذلك نكون قد حددنا مقياس رسم المحل الهندسي $\underline{Y}_{ab}$. ويتم نقل قيم الوسيط η من المحل الهندسي المرافق $\underline{Z}^*_{ab}$ (خيال المحل الهندسي $\underline{Z}_{ab}$) إلى المحل الهندسي $\underline{Y}_{ab}$ كما في الشكل (٤-٤٧-ب)

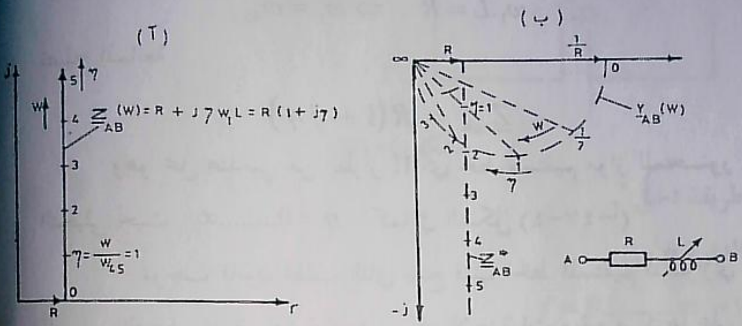
٢- $R = 0.........\infty$.

- نبتدئ برسم شعاع المركبة التخيلية $j\omega.L$ حيث أن قيمتها ثابتة، ونضيف إليها الشعاع R فنحصل على المحل الهندسي للممانعة $\underline{Z}_{ab}$.

- نقلب المحل الهندسي $\underline{Z}_{ab}$ فنحصل على المحل الهندسي للسماحية $\underline{Y}_{ab}$.

- ننسب القيمة المتغيرة R إلى قيمة مقاومة ثابتة ، مثلاً

$$R_1 = \omega . L \quad \Rightarrow \frac{R}{R_1} = P$$



الشكل(٤-٤٧)

$$\underline{Z}_{ab} = R + j\omega . L$$
$$= j\omega . L + R_1 . \frac{R}{R_1}$$

إذا اعتبرنا أن

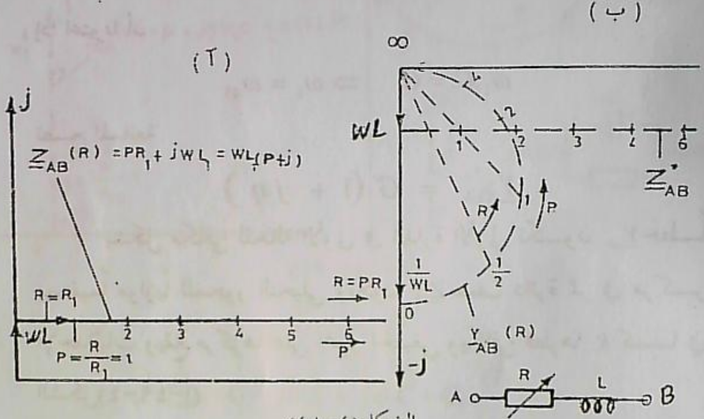
$$P = 0 .... \infty \text{ و } P = \frac{R}{R_1} \text{ و } \omega . L = R_1$$

تصبح الممانعة

$$\underline{Z}_{ab} = \omega . L (P + j)$$

وهو محل هندسي من الطراز II أي خط مستقيم مواز للمحور الحقيقي حيث $P = 0 .... \infty$ كما في الشكل (٤-٤٨-أ)

- نقلب $\underline{Z}_{ab}$ فنحصل على $\underline{Y}_{ab}$ وهي نصف دائرة تمر في مركز الإحداثيات ويقع مركزها على المحور التخيلي ويكافئ قطرها $\frac{1}{\omega.L}$. ويتم نقل قيم الوسيط P كما في الحالة السابقة كما في الشكل (٤-٤٨-ب)



الشكل(٤-٤٨)

الدارة الثانية:

١- $f = 0.........\infty$

- نبتدئ برسم الشعاع $\frac{1}{R}$ ونضيف إليه الشعاع $j\omega.C$ أي بشكل مكافئ للدارة الأولى نضيف شعاعي السماحيات فنحصل على المحل الهندسي للسماحية $\underline{Y}_{ab}$.

- نقلب المحل الهندسي $\underline{Y}_{ab}$ فنحصل على المحل الهندسي للممانعة $\underline{Z}_{ab}$.

- ننسب التردد الزاوي ω إلى تردد زاوي ثابت ω_1، فيكون $\frac{\omega}{\omega_{45}} = \eta$.

$$\underline{Y}_{ab} = G + j\omega.C = G + j\omega_1.C.\frac{\omega}{\omega_1}$$

إذا اعتبرنا أن

$$\omega_1.C = G \quad \Rightarrow \omega_1 = \omega_{45}$$

تصبح الممانعة

$$\underline{Y}_{ab} = G\left(1 + j\eta\right)$$

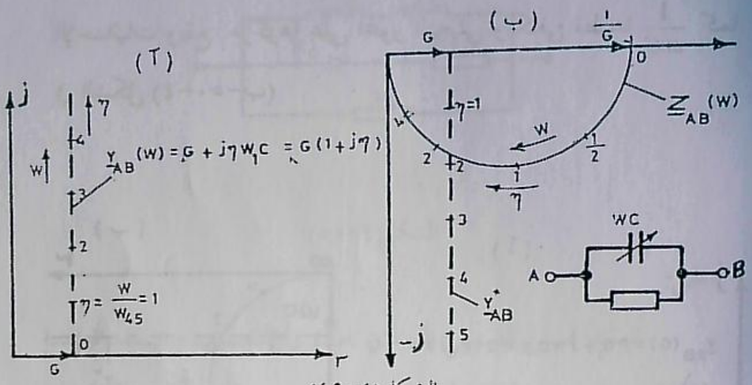
بشكل مكافئ للحالة الأولى في الدارة الأولى تكون $\underline{Y}_{ab}$ خطاً مستقيماً موازياً للمحور التخيلي وتكون $\underline{Z}_{ab}$ نصف دائرة تمر في مركز الإحداثيات ويقع مركزها على المحور الحقيقي ويكافئ قطرها R كما في الشكل(٤-٤٩-أ)

٢- $R = 0.........\infty$.

- نبتدئ برسم شعاع المركبة التخيلية $j\omega.C$ ونضيف إليها الشعاع $\frac{1}{R}$ فنحصل على المحل الهندسي للسماحية $\underline{Y}_{ab}$.

- نقلب المحل الهندسي $\underline{Y}_{ab}$ فنحصل على المحل الهندسي للممانعة $\underline{Z}_{ab}$.

- ننسب القيمة المتغيرة $\frac{1}{R}$ إلى قيمة ناقلية ثابتة $\frac{1}{R_1}$، فيكون:



الشكل(٤-٤٩)

$$\frac{G}{G_1} = P$$

$$\underline{Y}_{ab} = G + j\omega.C = j\omega.C + G_1.\frac{G}{G_1}$$

إذا اعتبرنا أن

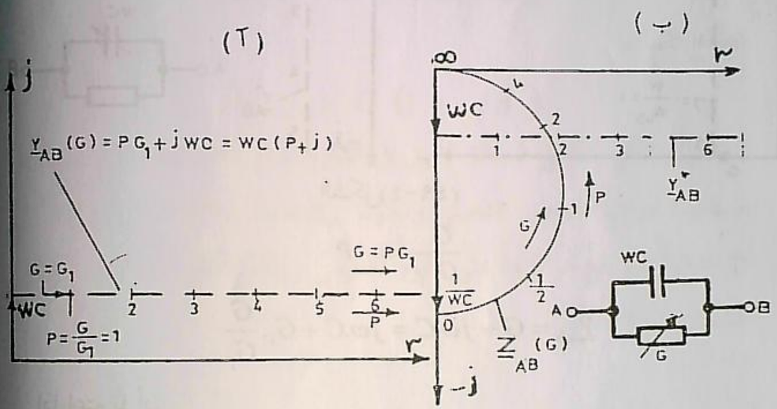
$$P = 0 ....\ \infty \quad و \quad P = \frac{G}{G_1} \quad و \quad \omega.C = G_1$$

تصبح الممانعة

$$\underline{Y}_{ab} = \omega.C\left(P + j\right)$$

وهو محل هندسي من الطراز II أي خط مستقيم موازٍ للمحـــور الحقيقي كما في الشكل (٤-٥٠-أ)

- نقلب $\underline{Y}_{ab}$ فنحصل على $\underline{Z}_{ab}$ وهي نصف دائرة تمر في مركز الإحداثيات ويقع مركزها على المحور التخيلي ويكافئ قطرها $\frac{1}{\omega.C}$ كما في الشكل (٤-٥٠-ب)



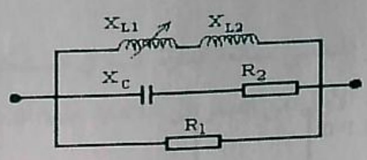
الشكل(٤-٥٠)

مسألة (٤-٨):

ارسم المحل الهندسي لممانعة الدارة المبينة في الشكل (٤-٥١) إذا تغيرت قيمة الملف الأول من الصفر إلى اللانهاية حسب الشكل المبين علما **أن** :

$R_1 = 12[\Omega],\ X_{L2} = 3[\Omega], X_C = 10\,[\Omega]\ \ , R_2 = 2\ [\Omega]$

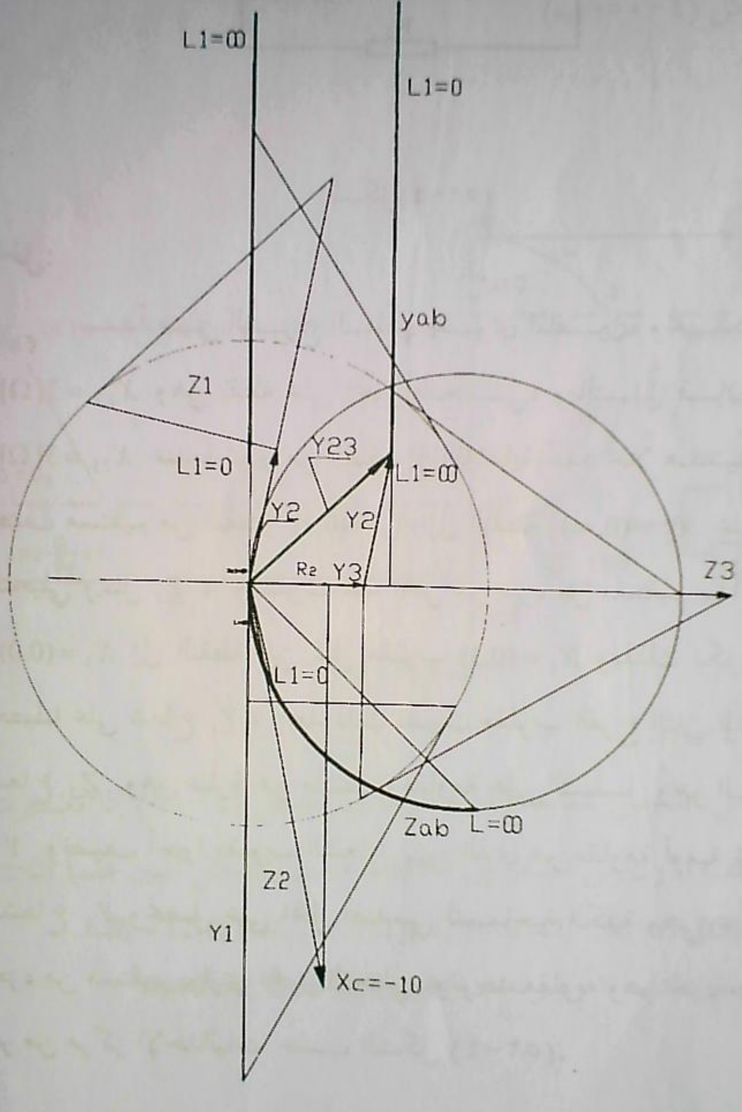
كل ١ سم يعادل ١أوم ونصف قطر دائرة القلب $B = 6\ cm$



الشكل(٤-٥١)

الحل:

نبدأ من الفرع الذي يحوي الملفين، ونحدد قيمة $X_{L2} = 3[\Omega]$ وهي نقطة على المحور التخيلي، وبالتالي فإن قيمة $X_{L1} = 3[\Omega]$ عندما تتغير من الصفر إلى اللانهاية تحدد محلاً هندسياً وهو نصف مستقيم من النقطة $X_1 = (0,3)$ إلى النقطة $X_2 = (0,\infty)$ على المحور التخيلي ويمثل $\underline{Z}_1$ ، ومقلوب هذا المحل هو جزء من مستقيم يبدأ بالنقطة $X_3 = (0,0)$ إلى النقطة التي تمثل مقلوب $X_1 = (0,3)$ وبذلك نكون قد حصلنا على شعاع $\underline{Y}_1$ ، وبعد ذلك نضيف مقلوب الفرع الثاني الذي يمثل شعاع $\underline{Z}_2$ وهو عبارة عن مكثف ومقاومة على التسلسل وهو الشعاع $\underline{Y}_2$ ونضيف أخيرا مقلوب الشعاع $\underline{Z}_3$ الذي هو مقاومة أومية بحتة تمثل الشعاع $\underline{Y}_3$ ونحصل على المحل الهندسي للسماحية الكلية وهي عبارة عن جزء من مستقيم يوازي المحور التخيلي، ونوجد مقلوبه وهو جزء من دائرة تمر من مركز الإحداثيات حسب الشكل (٤-٥٢).

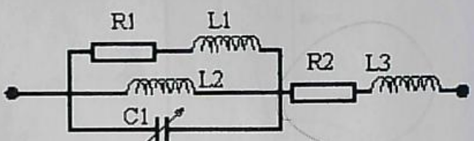


الشكل(٤-٥٢)

مسألة (٤-٩):

ارسم المحل الهندسي لممانعة الدارة المبينة في الشكل (٤-٥٣) إذا تغيرت قيمة السعة الأولى من الصفر إلى اللانهاية علماً أن : كل ١ سم يعادل ١ أوم

$$R_1 = 2\,[\Omega]\ ,\ X_{L1} = J1[\Omega]\ ,\ X_{L2} = J2[\Omega]$$
$$R_2 = 1[\Omega]\ ,\ X_{L3} = J1[\Omega]\ ,\ B = 5\,[cm]$$



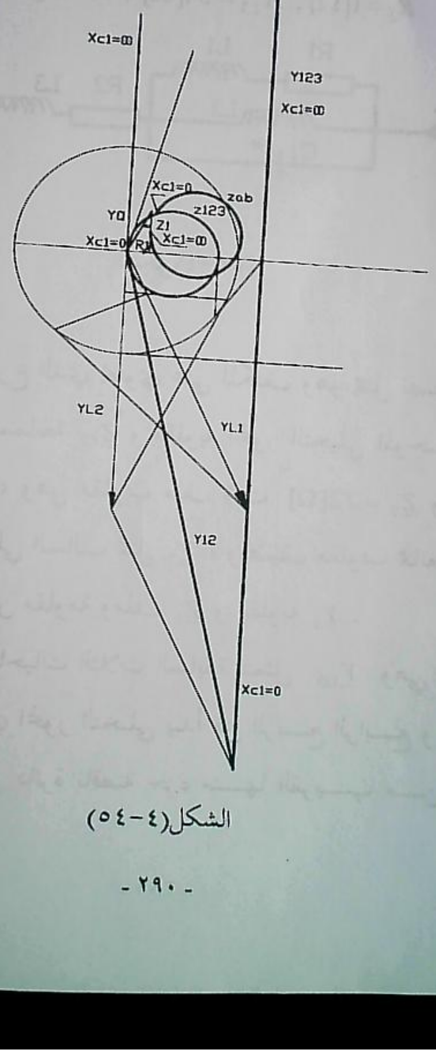
الشكل(٤-٥٣)

الحل:

نبدأ من الفرع الذي يحتوي على المكثف وهو يمثل نصف المحور التخيلي السالب كممانعة $\underline{Z}_{C1}$ و مقلوبه المحور التخيلي الموجب، نضيف سماحية الفرع الثاني، وهي مقلوب ملف بحت $\underline{Z}_2 = J2[\Omega]$ و مقلوبه نقطة في المحور التخيلي السالب تمثل $\underline{Y}_2$ ، ونضيف مقلوب ممانعة الفرع الثالث وهو عبارة عن مقاومة وملف $\underline{Z}_1$ و مقلوبه $\underline{Y}_1$.

نضيف السماحيات الثلاث السابقة لتمثل $\underline{Y}_{123}$ وهي عبارة عن نصف مستقيم يوازي المحور التخيلي يبدأ من الربع الرابع و مقلوبه $\underline{Z}_{123}$ وهي عبارة عن دائرة ناقصة جزء منها القريب من مركز

الإحداثيات في الربع الأول ونضيف إلى ذلك ممانعة المقاومة R_2 والملــف L_3 وهي عبارة عن ممانعة من الربع الأول وترك الدائرة الناقصة إلى تلك النقطة لتشكل الممانعة الكلية للدارة المطلوبة $\underline{Z}_{ab}$ كما هــو مــبين في الشكل (٤-٥٤) .

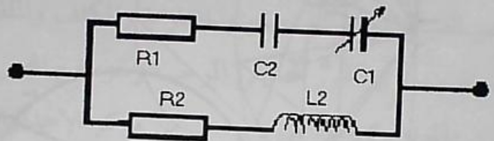


الشكل(٤-٥٤)

مسألة (٤-١٠):

ارسم المحل الهندسي لممانعة الدارة إذا تغيرت قيمة السعة الأولى من الصفر إلى اللانهاية حسب الشكل (٤-٥٥) علماً أن: كل ١ سم يعادل ١ أوم

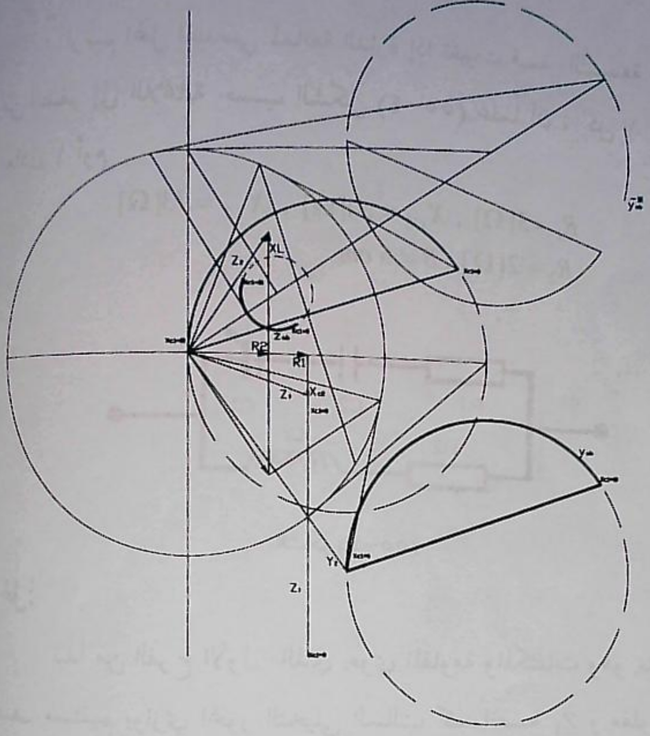
$$R_1 = 3[\Omega]\ ,\ X_{C2} = J1[\Omega]\ ,\ X_{L2} = J3[\Omega]$$
$$R_2 = 2[\Omega]\ ,B = 5\ cm$$



الشكل(٤-٥٥)

الحل:

نبدأ من الفرع الأول الذي يحوي المقاومة والمكثفات وهو يمثل نصف مستقيم يوازي المحور التخيلي السالب كممانعة $\underline{Z}_1$ و مقلوبه $\underline{Y}_1$ جزء من دائرة تمر من مركز الإحداثيات واقعة في الربع الأول حسب الشكل، نضيف سماحية الفرع الثاني $\underline{Y}_2$ وبذلك نحصل على السماحية الكلية $\underline{Y}_{12}$ وهي موجودة كاملة في الربع الرابع، ونوجد مقلوبها وهو جزء من دائرة موجودة في الربع الأول كما هو مبين في الشكل (٤-٥٦) وهو المطلوب .

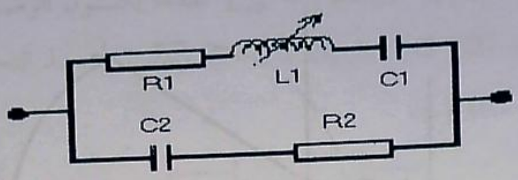


الشكل(٤-٥٦)

مسألة (٤-١٠):

ارسم المحل الهندسي لممانعة الدارة إذا تغيرت الملف الأول من الصفر إلى اللانهاية حسب الشكل (٤-٥٧) علماً أن: كل ١سم يعادل ١ أوم

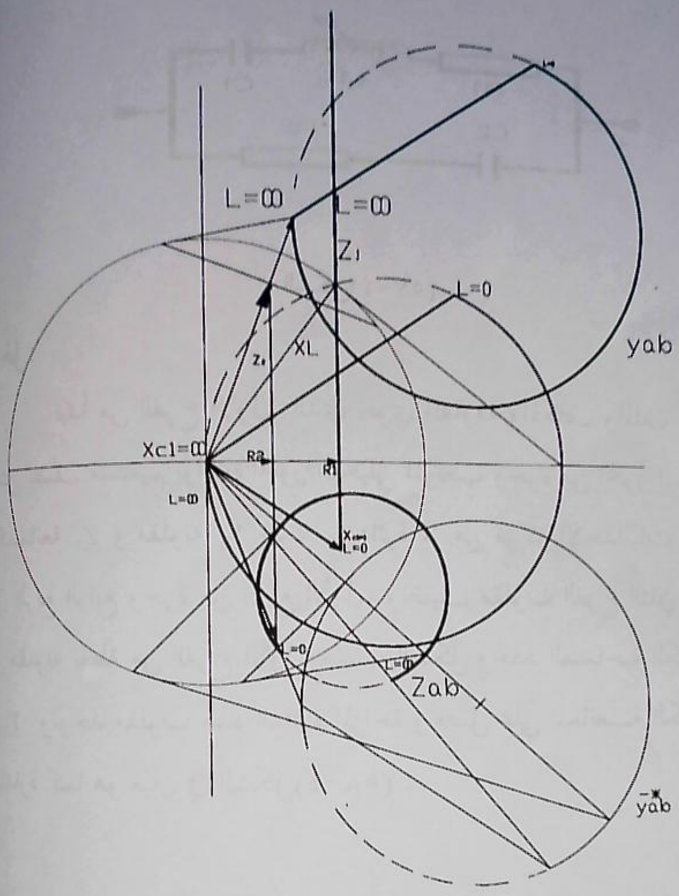
$$R_1 = 3[\Omega]\ ,\ X_{C1} = J1[\Omega]\ ,\ X_{C2} = J3[\Omega]$$
$$R_2 = 2[\Omega]\ , B = 5\ cm$$



الشكل(٤-٥٧)

الحل:

نبدأ من الفرع الأول الذي يحوي المقاومة والمكثف والملف وهو يمثل نصف مستقيم يوازي المحور التخيلي الموجب وجزء من المحور السالب كممانعة $\underline{Z}_1$ و مقلوبه $\underline{Y}_1$ جزء من دائرة تمر من مركز الإحداثيات واقعة في الربع الرابع وجزء من الربع الأول، ونضيف مقلوب الفرع الثاني $\underline{Z}_2$ ، و مقلوبه نقطة من الفرع الأول حسب الشكل وتحدد السماحية الكلية $\underline{Y}_{12}$ ونوجد مقلوب هذه الدائرة المزاحة ونحصل على الممانعة الكلية للدارة كما هو مبين في الشكل(٤-٥٨) .

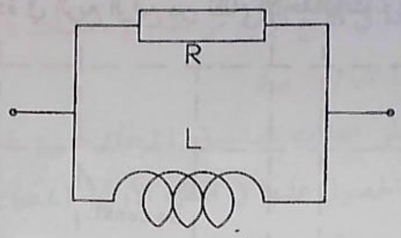


الشكل(٤-٥٨)

٤-٦-٣: مخطط الدائرة و تطبيقاته :[11]

نعالج أولا الدارة المبينة في الشكل(٤- ٥٩) و نرسم في نظام إحداثيات :

١ - المحلات الهندسية $\underline{Y}_{ab} = f(\omega.L)$ عندما يكون الوسيط R وتساوي قيمته $R = 1, 1.25, 2, 3, 5 \ [\Omega]$ وبحيث يأخذ التحريض القيمة $L = 0..........\infty$.



الشكل(٤-٥٩)

٢- المحلات الهندسية $\underline{Y}_{ab} = f(R)$ عندما يكون الوسيط $\omega.L$ وتساوي قيمته $\omega.L = 1, 1.25, 2, 3, 5 \ [\Omega]$ وبحيث تأخذ المقاومة القيمة $R = 0........\infty$.

ثم نرسم في نظام إحداثيات آخر :

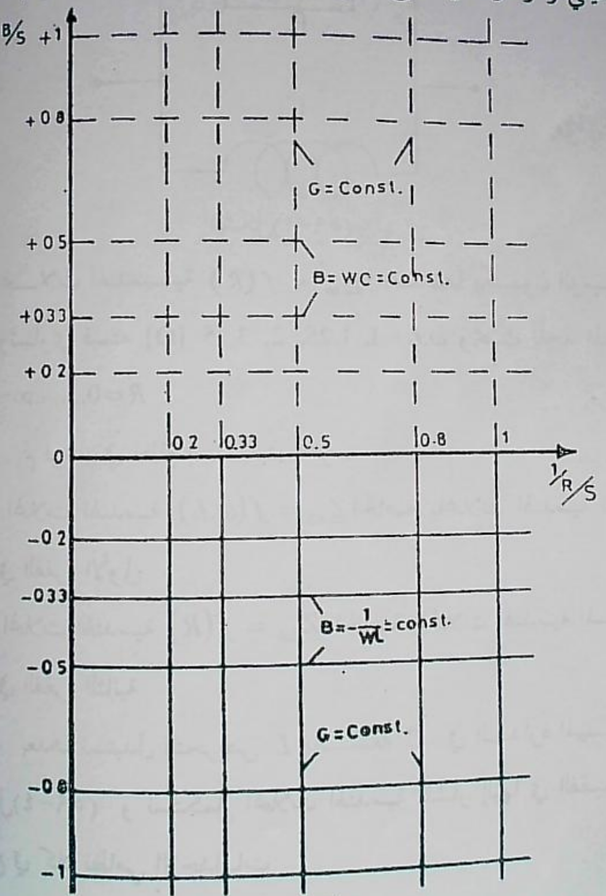
٣- المحلات الهندسية $\underline{Z}_{ab} = f(\omega.L)$ الخاصة بالمحلات الهندسية المشار إليها في الفقرة الأولى

٤- المحلات الهندسية $\underline{Z}_{ab} = f(R)$ الخاصة بالمحلات الهندسية المشار إليها في الفقرة الثانية

بعدها نستبدل التحريض L بالسعة C في الدارة المبينة في الشكل(٤-٥٩) و نستكمل المحلات الهندسية المشار إليها في الفقرات الأربع في كلا نظامي الإحداثيات

الحالة الأولى $\cdot \underline{Y}_{ab} = f(\omega . L)$

وهي محلات هندسية من الطراز II وعندما تكون R = const أي G = const تكون المحلات الهندسية خطوطا مستقيمة موازيــة للمحــور التخيلي وموجودة في الربع الرابع من نظام الإحداثيات ، شكل (٤-٦٠)



الشكل(٤-٦٠)

الحالة الثانية $\underline{Y}_{ab} = f(R)$

وهي محلات هندسية من الطراز II وعندما تكون L = const أي B = const تكون المحلات الهندسية خطوطاً مستقيمة موازية للمحور الحقيقي وموجودة في الربع الرابع من نظام الإحداثيات ، شكل (٤-٦٠)

الحالة الثالثة $\underline{z}_{ab} = f(\omega.L)$

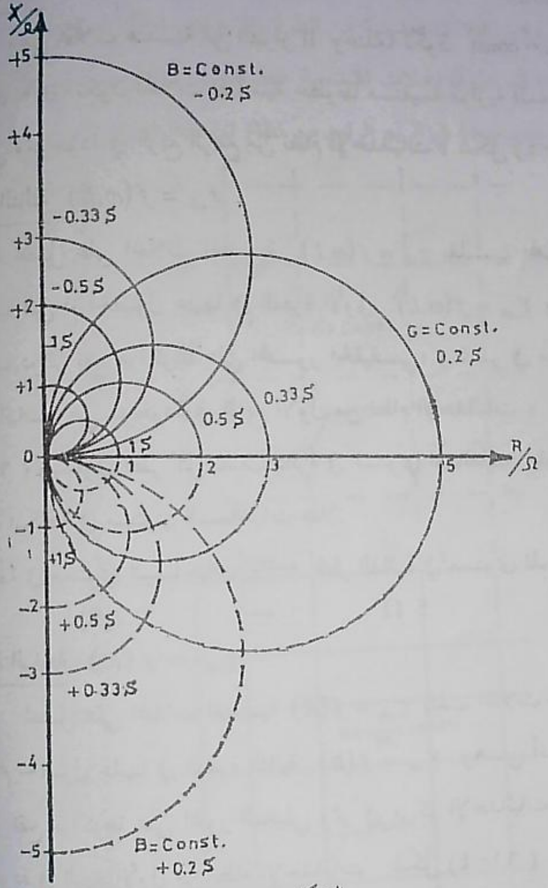
نحصل على المحلات الهندسية $\underline{z}_{ab} = f(\omega.L)$ بقلب المحلات الهندسية التي تم الحصول عليها في الفقرة الأولى $\underline{Y}_{ab} = f(\omega.L)$ وهي أنصاف دوائر تقع مراكزها على المحور الحقيقي، و تمر في مركز الإحداثيات وهي موجودة في الربع الأول من نظام الإحداثيات ، شكل(٤-٦١) ويساوي قطر كل نصف دائرة في مستوي الممانعات مقلوب القيمة المكافئة في مستوي السماحيات مثلا:

القيمة في مستوي السماحيات ← قطر الدائرة في مستوى الممانعات

5 Ω ← 0.2[S]

الحالة الرابعة $\underline{z}_{ab} = f(R)$

نحصل على المحلات الهندسية $\underline{z}_{ab} = f(R)$ بقلب المحلات الهندسية التي تم الحصول عليها في الفقرة الثانية $\underline{Y}_{ab} = f(R)$ وهي أنصاف دوائر تقع مراكزها على المحور التخيلي وتمر في مركز الإحداثيات وهي موجودة في الربع الأول من نظام الإحداثيات شكل (٤-٦١)



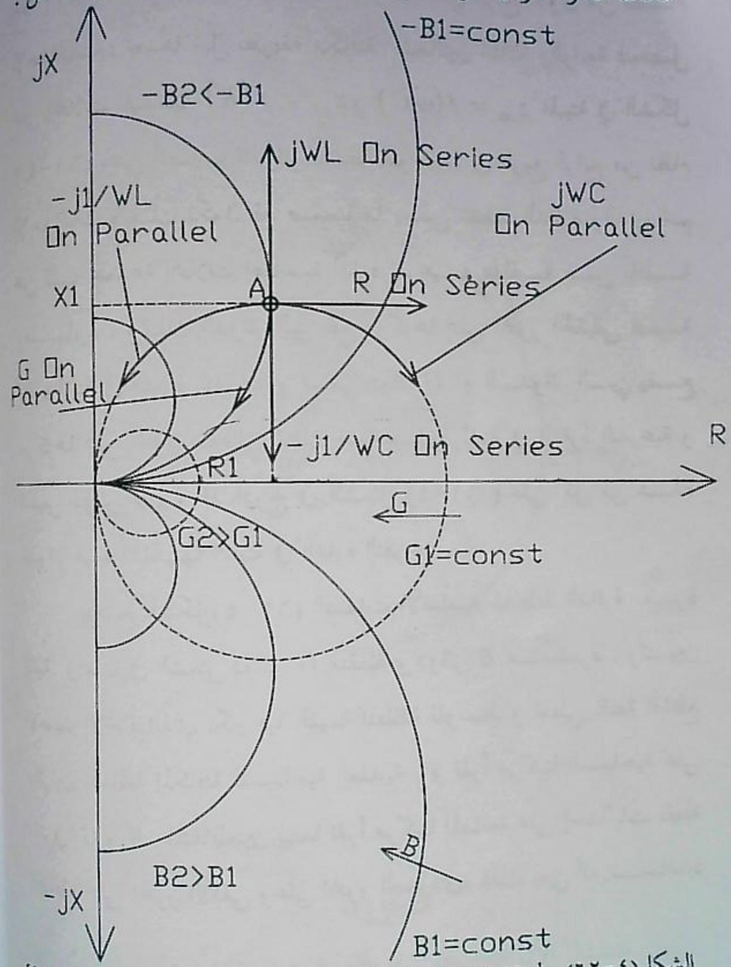
الشكل(٤-٦١)

نستبدل الآن التحريض L بالسعة C في الدارة المبينة في الـشكل (٤-٥٩) نحل بطريقة مكافئة للحالتين الأولى والثانية فنحـصل علـى

المحلات الهندسية $\underline{Y}_{ab} = f(\omega.C)$ و $\underline{Y}_{ab} = f(R)$ المبينة في الشكل (٤-٦٠) وهي الخطوط المستقيمة المنقطة الموجودة في الربع الأول من نظام الإحداثيات ، بعدها نحل بطريقة مكافئة للحالتين الثالثة والرابعة فنحصل على المحلات الهندسية $\underline{Z}_{ab} = f(R)$ و $\underline{Z}_{ab} = f(\omega.C)$ المبينة في الشكل (٤-٦١) وهي أنصاف الدوائر المنقطة الموجودة في الربع الرابع من نظام الإحداثيات وبذلك نكون قد صممنا ما يسمى مخطط الدائرة والذي نجم عن قلب مجموعة المحلات الهندسية لدارة تفرعيه مؤلفة من ناقلية ومسايرة ، وتمتلك الدوائر التي يقع مركزها على المحور الحقيقي قيمة ناقليه ثابتة في الدارة التفرعية و تسمى دوائر G و الدوائر التي يقع مركزها على المحور التخيلي تمتلك قيمة مسايرة ثابتة في الدارة التفرعية و تسمى دوائر B، و قد أدرج في الشكل (٤-٦١) على كل من هذه الدوائر قيمة سماحيتها الثابتة في الدارة التفرعية .

يوضح الشكل(٤-٦٢) الصفات الأساسية لمخطط الدائرة مرة ثانية. رسمت في الشكل دوائر G منقطة و دوائر B مستمرة . وتبين الأسهم الاتجاه الذي تكبر فيه القيمة المطلقة للوسيط و تعطي نقطة تقاطع دائرتين الممانعة المكافئة للسماحية العقدية . و تقرأ مركبتا السماحية على دائرتي G و B المتقاطعتين بينما تقرأ مركبتا الممانعة على إحداثيات نقطة التقاطع على المحور الأفقي وعلى المحور العمودي، ذلك يعني أنه بمساعدة

مخطط الدائرة و بدون إجراء عمليات حسابية يمكن إيجاد الدارة التسلسلية المكافئة لدارة تفرعيه مؤلفة من مقاومة أومية و مفاعلة تخيلية و العكس.



الشكل(٤-٦٢) طريقة الانتقال على المنحنيات والدوائر عند توصيل العناصر [11]

إذا وصلنا بدارة معطاة تكافئ ممانعتها أو سماحيتها النقطة A المبينة في الشكل(٤-٦٢) مقاومة أومية على التسلسل عندها تبقى المفاعلة التخيلية للدارة ثابتة و تزاح النقطة A إلى اليمين أفقياً بحيث تكبر المقاومة الأومية.

أما إذا وصلنا مع الدارة مفاعلة تخيلية موجبة أو سالبة على التسلسل عندها تبقى مركبة المقاومة الأومية ثابتة و تزاح النقطة A عمودياً إلى الأعلى أو إلى الأسفل .

عند وصل مقاومة أومية على التفرع مع الدارة التفرعية المحددة بالنقطة A تبقى المركبة التخيلية الخاصة بالدارة التفرعية ثابتة و تزاح النقطة A على محيط دائرة B باتجاه قيمة ناقلية أكبر ، انظر الشكل (٤-٦٢).

أما إذا وصلنا سعة (سماحية موجبة) على التفرع مع الدارة المحددة بالنقطة A عندها تبقى ناقلية الدارة التفرعية ثابتة و تنزاح النقطة A على محيط دائرة G باتجاه قيمة مسايرة أكبر (باتجاه دوران عقارب الساعة).

و إذا وصلنا تحريضا (سماحية سالبة) على التفرع تنزاح النقطة A على دائرة G بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة .

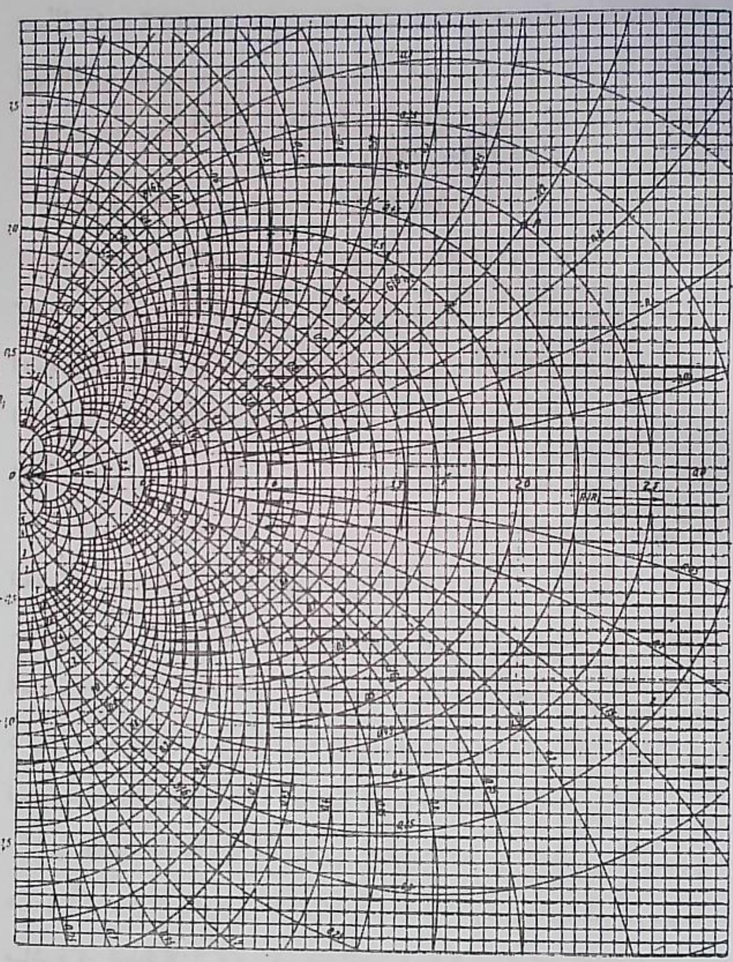
وإذا كانت القيمة المطلقة للسماحية العقدية أو الممانعة للعنصر الموصول مع الدارة المحددة بالنقطة A معروفة عندها يمكننا تحديد المسافة

التي يجب أن تتراحها النقطة A تعطي النقطة الجديدة ممانعـــة و سماحيـــة الدارة الجديدة ، أي الدارة المحددة بالنقطة A بعد وصل العنصر بها .

بعد قراءة قيمة المركبة الحقيقية والمركبة التخيلية من المخطط يمكننا وضع دارة مكافئة للدارة الجديدة. ومن الطبيعي أنه يمكننا معالجة أية دارة تفرعيه أو تسلسلية بتطبيق القواعد المشار إليها أعلاه . و بتطبيـــق هـــذه القواعد يمكننا مخطط الدائرة من تقويم أية دارة بسرعة تقويماً نوعياً حـــتى ولو أضفنا إلى هذه الدارة عدة أنواع من المقاومات بتوصيل مختلف .

وإذا وقعت القيم للعناصر خارج مخطط الدائرة وجب تحويل الدارة باستعمال عامل تحويل (مثلا تقسيم جميع قيم المقاومات على عشرة ، أي ضرب جميع السماحيات بعشرة) في النهاية يجب مراعاة عامل التحويـــل بشكل مكافئ.

يبين الشكل (٤-٦٣) مخطط الدائرة بشكله العملي الذي يمكننا من معالجة الدارات الكهربائية بأنواعها المختلفة وفي حـــالات التوصـــيل المختلفة كما ستبين الأمثلة القادمة



الشكل(٤-٦٣) مخطط الدائرة العام [11]

مسألة (٤- ١٢):

لدينا الممانعات

$$\underline{Z}_1 = 1{,}6 + j0{,}8[\Omega]\ ,\ \underline{Y}_2 = 0{,}3 - j0{,}2[S]$$
$$\underline{Z}_3 = 250 - j90[\Omega]$$

١- حدد بمساعدة مخطط الدائرة ($\underline{Y}_3 , \underline{Z}_2 , \underline{Y}_1$) .

٢- اختبر صحة النتائج التي تحصل عليها في الفقرة الأولى حسابياً .

٣- حدد لكل ممانعة قيمتي عنصري التوصيل إذا كانا موصولين على التسلسل أو على التفرع و عندما يكون التردد $f = 50[HZ]$ استعن لهذا الغرض بمخطط الممانعة .

طريقة الحل :

بالنسبة للممانعتين $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_1$ تمثل مركبتا $\underline{Z}$ الحقيقية والتخيلية المعطاتان أعلاه قيمتي الإحداثي الأفقي والعمودي في مخطط الدائرة . (في حالة $\underline{Z}_3$ يجب أولا تحويل قيمتي المركبتين حتى تتسنى قراءتهما على مخطط الدائرة) . في النقطة المكافئة لهاتين الإحداثيتين على مخطط الدائرة تتقاطع دائرة G و دائرة B . و تكافئ قيمة وسيط الدائرة G المركبة الحقيقية، و قيمة وسيط الدائرة B المركبة التخيلية للسماحية العقدية .

بالنسبة للسماحية العقدية $\underline{Y}_2$ نتبع هنا الطريق المعاكس للسابق عندما تكون $\underline{Z}$ معطاة ، وإذا صدف أن قيمة وسيط الدائرة غير مرسومة مباشرة في مخطط الدائرة فيمكن أما تقدير قيمة الوسيط كقيمة بينية بين دائرتين أو تصميم ورسم الدائرة التي تمر في نقطة التقاطع . و عند تصميم

دائرة لقيمة وسيط بينية يجب مراعاة أن تمر الدائرة في النقطة المحددة بـــ $\underline{Y}$ وأن تمر في مركز الإحداثيات وان يقع مركزها على المحـــور الحقيقـــي أو التخيلي، ومن قطر الدائرة التي نرسمها نستطيع بسهولة تحديد سماحية هذه الدائرة .

الحل :

١- تحديد ($\underline{Y}_3 , \underline{Z}_2 , \underline{Y}_1$) بمساعدة مخطط الدائرة :

من مخطط الدائرة نستطيع قراءة ($\underline{Z}_2 , \underline{Y}_1$) مباشرة

$$\underline{Y}_1 = 0{,}5 - j0{,}25[\Omega] \quad , Z_2 = 2{,}3 + j1{,}55[S]$$

أما بالنسبة لـــ $\underline{Z}_3$ فيجب أولا تحويل قيمتها حتى تتسنى قراءتهـــا على المخطط

$$\underline{Z}_3 / 100 = 2{,}5 - j0{,}9[\Omega] \Rightarrow 100\underline{Y}_3 = 0{,}35 + j0{,}13[S]$$

$$\underline{Y}_3 = 3{,}5 + j1{,}3[mS]$$

٢- اختبار صحة النتائج البيانية حسابياً :

بموجب قوانين التحويل من دارة تسلسلية إلى تفرعية.

$$B_p = -\frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

$$G_p = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

$$G_{p1} = \frac{1{,}6}{1{,}6^2 + 0{,}8^2} = 0{,}5[S]$$

$$B_{p1} = -\frac{0{,}8}{1{,}6^2 + 0{,}8^2} = 0{,}25[S]$$

$$G_{p3} = \frac{250}{10^3}[(2,5)^2 + (0,9)^2] = 3,53\ [S]$$

$$B_{p3} = -\frac{90}{10^3}[(2,5)^2 + (0,9)^2 = 1,27\ [mS]$$

و بموجب المعادلة (4,11) و المعادلة (4,13)

$$R_s = \frac{G_p}{G_p^2 + B_p^2} = \frac{G_p}{Y_p^2}$$

$$X_s = -\frac{B_p}{G_p^2 + B_p^2} = -\frac{B_p}{Y_p^2}$$

بتعويض القيم العددية المعطاة تكون :

$$R_{s2} = 2,3[\Omega]$$

$$X_{s2} = 1,54[\Omega]$$

٣- تحديد قيم عناصر الدارات التسلسلية و التفرعية المتكافئة :

نحسب فيما يلي قيم عناصر الدارات المراد مكافئتها فقط

$$\underline{Z_1} = R_1 + J\omega.L = 1,6 + J0,8[\Omega]$$

ومنه :

$$L = \frac{0,8}{314} = 2,54\ [mH\ ]$$

أما إذا قرأنا قيمة L من مخطط الممانعة فتكون

$$L = 2,5[mH\ ]$$

$$\underline{Y_2} = \frac{1}{\underline{Z_2}} = (0,3 - J0,2)[S]$$

$$= \frac{1}{R_p} + \frac{1}{J\omega.L_p}$$

و منه:

$$\omega . L_p = 5 [\Omega]$$
$$R_p = 3,33 [\Omega]$$

ونقرأ قيمة L من مخطط الممانعة

$$L_p = 16 [mH]$$
$$\underline{Z}_3 = 250 - J\,90 [\Omega]$$
$$= R - J \frac{1}{\omega . C}$$

و نقرأ من المخطط (C ≈ 35 µF)

فيا يلي قيم عناصر توصيل الدارات التسلسلية و التفرعية المتكافئة

الدارات التسلسلية :

Z_1	Y_2	Z_3
$R = 1,6[\Omega]$	$R = 2,3[\Omega]$	$R = 250 [\Omega]$
$L = 2,54 [mH]$	$L = 5[mH]$	$C = 35[\mu F]$

الدارات التفرعية :

Z_1	Y_2	Z_3
$R = 2[\Omega]$	$R = 3,3[\Omega]$	$R = 283 [\Omega]$
$L = 12,7[mH]$	$L = 16[mH]$	$C = 4[\mu F]$

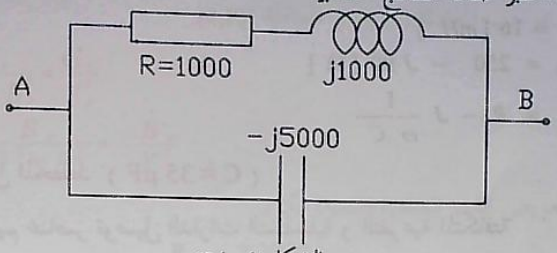
مسألة (٤- ١٣):

لدينا الدارة المبينة في الشكل(٤-٦٤)

١- حدد بمساعدة مخطط الدائرة $\underline{Z}_{AB}$ و $\underline{Y}_{AB}$

٢- ما القيمة التي يجب أن تأخذها R حتى تصبح $\underline{Z}_{AB}$ حقيقية و ما هي قيمتها عند ذلك

٣- اختبر صحة النتائج حسابيا



الشكل(٤-٦٤)

طريقة الحل :

١- نبحث في مخطط الدائرة عن النقطة التي تكافئ دارة الفرع العلوي التسلسلية

$$\underline{Z} = 1 + J1[K\Omega]$$

تتقاطع في هذه النقطة دائرة G ودائرة B و يعني وصل $-J5[K\Omega]$ على التفرع الدوران على دائرة G باتجاه دوران عقارب الساعة بمقدار القيمة المطلقة للسماحية المكافئة لـ $-J5[K\Omega]$ مع مراعاة مقياس الرسم.

٢- يمكن الإجابة بسهولة عن هذا السؤال على مخطط الدائرة و يجب ملاحظة أن كلتا المركبتين التخيليتين يجب أن تبقيا ثابتتين وهذا يعني بالنسبة لعملية التصميم على مخطط الدائرة أنه يجب أن يقطع في كل محاولة العدد نفسه من الدوائر B

الحل :

١-تحديد ($\underline{Z}_{AB}$ و $\underline{Y}_{AB}$) بمساعدة مخطط الدائرة :

تتقاطع في النقطة ($1 + J1[K\Omega]$) الـــدائرتان $G = 0,5[mS]$ و $B = -0,5[mS]$.و يكافئ وصل $J5[K\Omega]$ -على التفرع وصل سماحية قيمتها $+0,2[mS]$. نبحث على الدائرة G عن نقطة تقاطعها مع $B = -0,3[mS]$ ونقرأ عنـــد نقطـــة التقـــاطع هـــذه قـــيم G, B, X, R

دارة تفرعية:

$G = 0,5[mS] \qquad B = -0,3[mS]$

دارة تسلسلية:

$R = 1,48[\Omega] \qquad X = +0,88[\Omega]$

٢ - تحديد قيمة R لتصبح $\underline{Z}_{AB}$ قيمة حقيقية :

نزيح النقطة $1 + J1$ إلى اليمين حتى نصل إلى الموضع الذي إذا درنا منه على دائرة G بمقدار $+0,2[mS]$ لوصلنا إلى المحور الحقيقي عنـــدها تكون:

$$R = 2[K\Omega]$$
$$Z = 2,5[K\Omega]$$

٣- التحقق من صحة النتائج البيانية حسابياً :

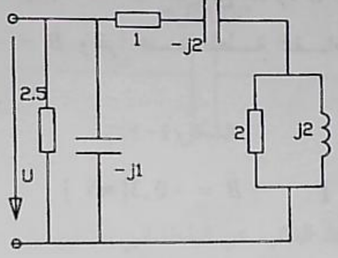
$$\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{R + J1} + \frac{1}{5}$$

و حتى تصبح $\underline{Y}_{AB}$ وبالتالي $\underline{Z}_{AB}$ حقيقية وجب أن يكـــون الجـــزء التخيلي مساوياً الصفر

$$R = 2[K\Omega]$$
$$Z = 2,5[K\Omega]$$

مسألة (٤– ١٤):

حدد بمساعدة مخطط الدائرة الممانعة $\underline{Z}_{AB}$ للـــدارة المبينـــة في الشكل (٤ – ٦٥)

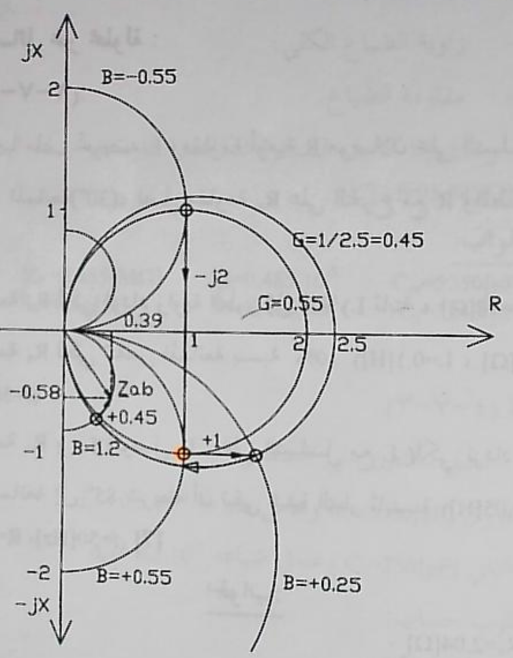


الشكل (٤– ٦٥)

طريقة الحل :

نبدأ هنا بالدارة التفرعية ($2\,\Omega \,/\!/\, j\,2\,\Omega$) كما هي الحال عند رسم مخطط شعاعي، تحدد نقطة التقاطع بين دائرتي السماحية المكافئتين لمركبتي الممانعة لهذه الدارة التفرعية، ويعـــني وصـــل ($1\,[\Omega]\;,\; -j2\,[\Omega]$) علـــى التسلسل مع الدارة التفرعية انزياح هذه النقطة إلى الأسفل موازية للمحور التخيلي ثم إلى اليمين موازية للمحور الحقيقي.

تمر في النقطة الجديدة دائرة G و دائرة B ويعني وصـــل (2,5 Ω
و Ω 1 j -) على التفرع الدوران على دائرة B و على دائرة G مـــسافتين مكافئتين للسماحيتين .



الشكل (٤- ٦٦)

الحل :

نحدد $\underline{Z}_{AB}$ كما هو مبين في الشكل (٤ — ٦٦) والذي يمثل جزءاً من مخطط الدائرة .

$$\underline{Z}_{AB} = 0,39 - J0,58[\Omega]$$

٤-٧: مسائل غير محلولة :

مسألة (٤-٧-١):

لدينا ملف تحريضه L ومقاومة أومية R موصلان على التسلسل، زاوية طور الممانعة(30^o)، نصل مقاومة R_x على التفرع مع R والمطلوب تحديد:

١- قيمة R_x لكي تزداد زاوية الطور إلى 80^o (L ثابتة ، R=18[Ω])

٢- قيمة R_x لكي تنقص الممانعة بنسبة 10% (L=0,1[H] ، R=18[Ω] ، f=50[Hz]).

٣- قيمة R_x و L_x (توصل L_x على التسلسل مع L)لكي تزداد زاوية طور الممانعة إلى 85^o شريطة أن تبقى شدة التيار ثابتة (L=0,05[H] ، R=12[Ω] ، f=50[Hz]) [7]

الجواب:

1- R_x=2,04[Ω]
2- R_x=16,72[Ω]
3- R_x=2,02[Ω], L_x= 12,97[mH]

مسألة (٤-٧-٢):

نصل مكثفين على التفرع

سعة الأول C_1=5000[pF] وعامل ضياعه $d_{c1}= 0,5.10^{-3}$

سعة الثاني C_2= 250[pF] وعامل ضياعه $d_{c2}= 0,2.10^{-3}$

والمطلوب حساب:

١- السعة الكلية.

٢- زاوية الضياع الكلي.

٣- مقاومة الضياع.

وذلك إذا كانت الدارة المكافئة دارة تفرعية ثم تسلسلية f=95,54[KHz] . [7]

الجواب:

R_p=0,655[MΩ] δ_{ct}=0,485.10^{-3} C_{pt}=5250[pF]

R_s=0,16[Ω] δ_c=0,485.10^{-3} C_s=5250[pF]

مسألة (٤-٧-٣):

نصل مكثفين على التسلسل

سعة الأول C_1=5000[pF] وعامل ضياعه $d_{c1}= 0,5.10^{-3}$

سعة الثاني C_2=250[pF] وعامل ضياعه $d_{c2}= 0,2.10^{-3}$

والمطلوب حساب:

١- السعة الكلية.

٢- زاوية الضياع الكلي. ٣- مقاومة الضياع.

وذلك إذا كانت الدارة المكافئة دارة تسلسلية ثم تفرعية f=95,54[KHz] . [7]

الجواب:

$R_s=1,5[\Omega]$ $\delta_{ct}=0,214.10^{-3}$ $C_{st}=238[pF]$

$R_p=32,6[M\Omega]$ $\delta_c=0,214.10^{-3}$ $C_p=238[pF]$

مسألة (٤-٧-٤):

ارسم علاقة الممانعة للسعة والتحريض بالتردد إذا تغير التردد ضمن المجال:

$$\omega=500.....5000[rad/s]$$

وإذا أخذت السّعة القيم

$$C=2\ ,\ 20\ ,\ 200[\mu F]$$

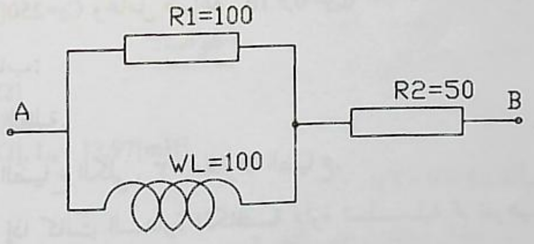
والتحريض القيم

$$L=2\ ,\ 20\ ,\ 200\ [mH]$$

وذلك بموجب مقياس رسم خطي ومقياس رسم لوغاريتمي مضاعف.

مسألة (٤-٧-٥) :

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٤-٦٧) والمطلوب:



الشكل (٤-٦٧)

١- حدد قيمة الممانعة $\underline{Z}_{ab}$ ومركبتها الحقيقية والتخيلية بيانياً.

٢- تأكد من صحة الحل البياني حسابياً.

مع العلم أن نصف قطر دائرة القلب $r = 5[cm]$ ومقياس الرسم $1[cm] = 20[\Omega]$ **[6]**

الجواب :

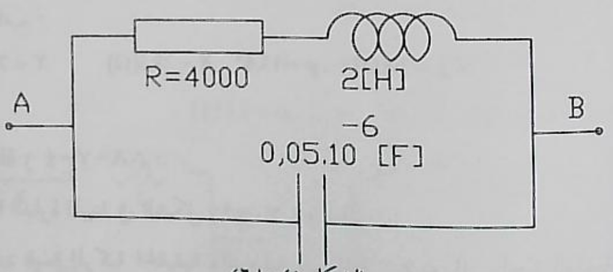
$Z_{ab} = 111,8[\Omega]$ $\varphi = 26,56^0$

$R = 100[\Omega]$ $X = 50[\Omega]$

مسالة (٤-٧-٦) :

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٤-٦٨) والمطلوب:

حدد قيمة الممانعة $\underline{Z}_{ab}$ ومركبتها الحقيقية والتخيلية بيانياً، وتأكد من صحة الحل البياني حسابياً. مع العلم أن نصف قطر دائرة القلب $r = 4[cm]$ ومقياس الرسم $1[cm] = 2[K\Omega]$ و $f = 500[Hz]$ **[6]**



الشكل (٤-٦٨)

الجواب :

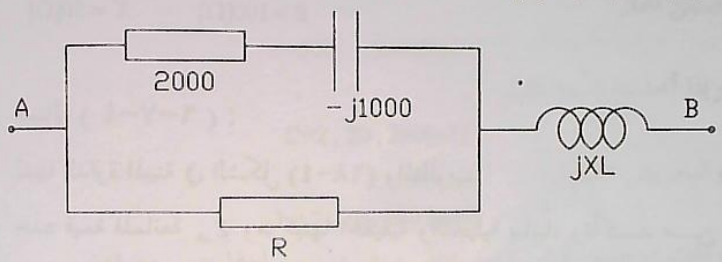
$Z_{ab} = 11,6[k\Omega]$ $\varphi = -31,4^0$ $R = 9,8[k\Omega]$ $X = -6,3[k\Omega]$

مسالة (٤-٧-٧) :

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٤-٦٩) والمطلوب:

حدد قيمة الممانعة $\underline{Z}_{ab}$ ومركبتها الحقيقية والتخيلية بيانياً، وتأكد من صحة الحل البياني حسابياً.

مع العلم أن نصف قطر دائرة القلب $r = 3[cm]$ ومقياس الرسم $1[cm] = 10[\Omega]$ **[6]**



الشكل (٤-٦٩)

الجواب :

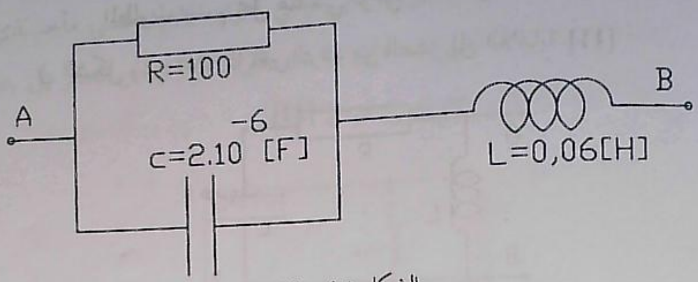
$Z_{ab} = 30[\Omega] \quad \varphi = 13,6^0 \quad R = 28,5[\Omega] \quad X = 7[\Omega]$

مسالة (٤-٧-٨) :

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٤-٧٠) والمطلوب:

حدد قيمة المركبة الحقيقية والتخيلية للممانعة $\underline{Z}_{ab}$ و للسماحية العقدية $\underline{Y}_{ab}$ بيانياً، وتأكد من صحة الحل البياني حسابياً.مع العلم أن نصف قطر

دائـــرة القلـــب $r = 4[cm]$ ومقيـــاس الرســـم $1[cm] = 2[K\Omega]$ و
[6] $f = 800[Hz]$



الشكل (٤-٧٠)

الجواب :

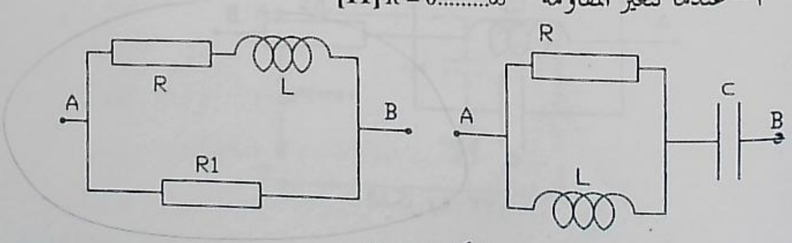
$\underline{Z}_{ab} = 50 + j250[\Omega], \quad \underline{Y} = 0{,}77 - j3{,}84[mS]$

مسالة (٤-٧-٩) :

المطلوب رسم محل هندسي نوعي لممانعة و سماحية الدارة المبينـــة في الشكل (٤-٧١) و ذلك

١- عندما يتغير التردد $f = 0 .... \infty$

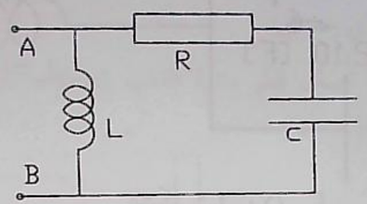
٢- عندما تتغير المقاومة $R = 0 .... \infty$ **[11]**



الشكل (٤-٧١)

مسالة (٤-٧-١٠) :

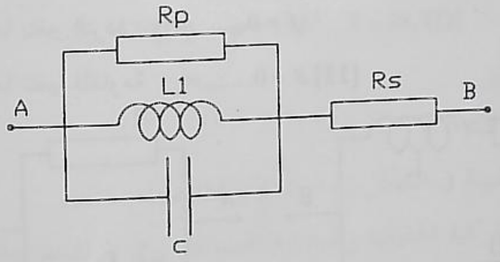
المطلوب رسم محل هندسي نوعي لسماحية مأخذي الدارة المبينة في الشكل (٤-٧٢) إذا تغير التردد من الصفر إلى اللانهاية **[11]**



الشكل (٤-٧٢)

مسالة (٤-٧-١١) :

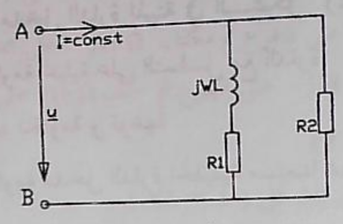
المطلوب رسم محل هندسي نوعي لسماحية مأخذي الدارة المبينة في الشكل (٤-٧٣) إذا تغير التردد من الصفر إلى اللانهاية **[6]**



الشكل (٤-٧٣)

مسالة (٤-٧-١٢)

المطلوب رسم محل هندسي نوعي للتوتر الهابط على مأخذي الدارة المبينة في الشكل (٤-٧٤) إذا تغير التردد الزاوي من الصفر إلى ω_1 حيث $\omega_1.L = R_1$ مع شرح موجز **[11]**

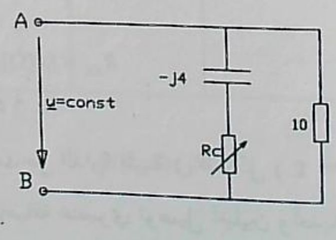


الشكل (٤-٧٤)

مسالة (٤-٧-١٣) :

ارسم بموجب مقياس رسم المحل الهندسي للتيار المار في مأخذي الدارة المبينة في الشكل (٤-٧٥).

بين على المحل الهندسي النقطة التي تكون فيها الزاوية بين التوتر والتيار 45^0 واحسب قيمة R_C عند هذه النقطة **[11]**



الشكل (٤-٧٥)

الجواب

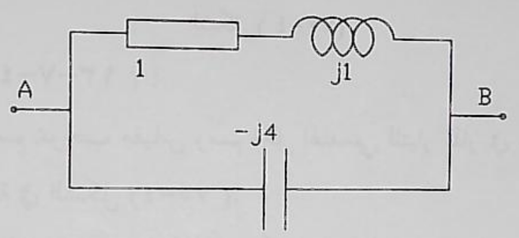
$R_C = 2[\Omega]$

مسالة (٤-٧-١٤)

المراد جعل ممانعة مدخل الدارة المبينة في الشكل (٤- ٧٦) حقيقية وذلك بتوصيل مقاومة تخيلية على التسلسل مع الدارة

١- حدد قيمة هذه المقاومة و نوعها

٢- حدد قيمة مقاومة مدخل الدارة الحقيقية مستعينا بمخطط الدائرة **[6]**



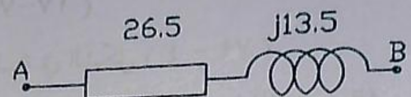
الشكل (٤-٧٦)

الجواب

$R_{AB} = 1,6[\Omega], JX_C = -J0,8[\Omega]$

مسالة (٤-٧-١٥)

المراد جعل ممانعة مدخل الدارة المبينة في الشكل (٤ — ٧٧) حقيقية و قدرها $12\ [\Omega]$ بإضافة عنصري توصيل تخيليين وتحديد قيمة كل منهما **[6]**



الشكل (٤-٧٧)

الجواب :

إضافة ملف j40 على التفرع ثم مكثف Ω j16 - على التسلسل

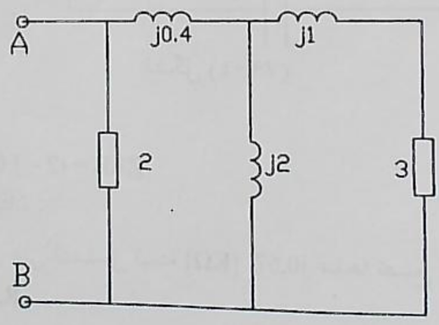
إضافة مكثف Ω j18 - على التفرع ثم ملف Ω j16 على التسلسل

مسالة (٤-٧-١٦)

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٤ - ٧٨)

١- احسب الممانعة $\underline{Z}_{AB}$ و اختبر صحة الحساب بواسطة مخطط الدائرة

٢- احسب الممانعة $\underline{Z}_{CD}$ و اختبر صحة الحساب بواسطة مخطط الدائرة



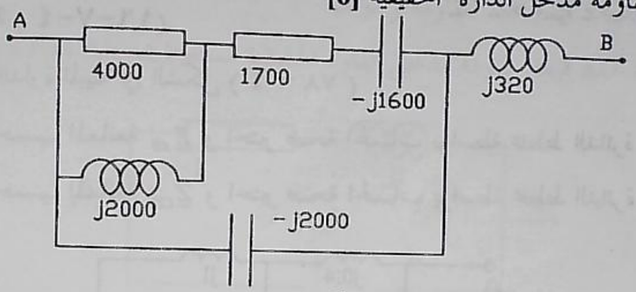
الشكل (٤-٧٨)

مسالة (٤-٧-١٧)

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٤ - ٧٩)

١- حدد بمساعدة مخطط الدائرة ممانعة المأخذين AB، وارسم شعاع الممانعة $\underline{Z}_{AB}$ على المخطط

٢-ما إمكانيات تحويل ممانعة مدخل الدارة إلى مقاومة حقيقية بإضافة عنصر توصيل واحد، وحدد نوع العنصر الواجب إضافته وقيمته. و مقاومة مدخل الدارة الحقيقية **[6]**



الشكل (٤-٧٩)

الجواب :

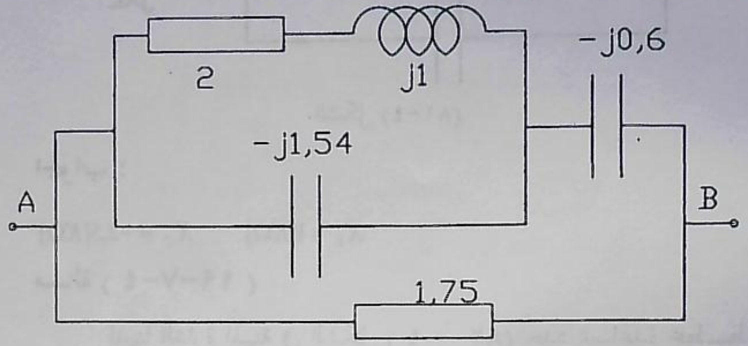
$\underline{Z}AB = (2 - j\ 0,67\ )[K\ \Omega$

توجد إمكانيتان :

- وصل تحريض على التسلسل قيمته [KΩ] j0,67 عندها تصبح مقاومة المدخل $R_{AB} = 2\ [K\Omega]$
- وصل تحريض على التفرع قيمته [Ω] j6,66 عندها تصبح مقاومة المدخل $R_{AB} = 2,22\ [K\Omega]$

مسالة (٤-٧-١٨) :

حدد بمساعدة مخطط الدائرة ممانعة و سماحية مأخذي الدارة المبينة في الشكل (٤-٨٠) **[6]**



الشكل (٤-٨٠)

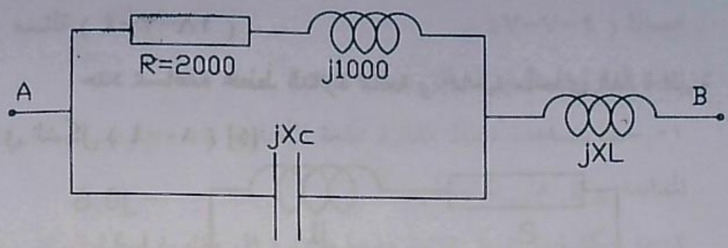
الجواب :

$\underline{Y}_{AB} = 0{,}8 + J0{,}4[S]$

$\underline{Z}_{AB} = 1 - J0{,}5[\Omega]$

مسالة (٤-٧-١٨)

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٤ - ٨١) حدد بمساعد مخطـط الدائرة قيمة كل من X_C و X_L بحيث تصبح ممانعة مدخل الدارة حقيقية و مساوية [K Ω] 2 **[6]**



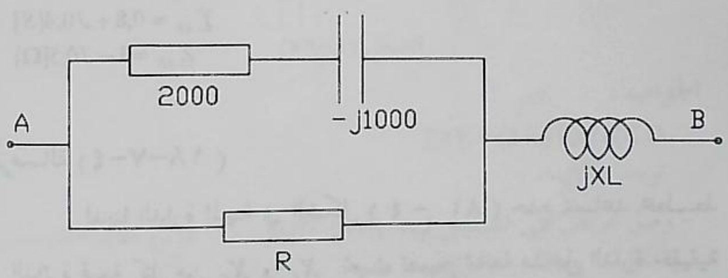
الشكل (٤-٨١)

الجواب :

$X_L = 1[K\Omega] \qquad X_C = -2{,}5[K\Omega]$

مسالة (٤-٧-١٩)

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٤ - ٨٢) حدد بمساعدة مخطط الدائرة قيمة كل من R و X_L بحيث تصبح ممانعة الدارة حقيقية و مساوية 1,5 [K Ω] .**[6]**



الشكل (٤-٨٢)

الجواب :

$X_L = 0{,}5[K\Omega] \quad R = 5[K\Omega]$

الفصل الخامس

الطنين الكهربائي

Electrical Resonance

يمكننا رؤية الاهتزازات الميكانيكية بالعين المجردة و الإحساس بها، و بالتالي من السهل علينا فهم خصائص هذه الاهتـــزازات . إلا أنـــه لا يمكننا رؤية الاهتزازات الكهربائية، و الإحساس بها، و بالتالي من الصعب تصويرها و فهم خصائصها .

لذلك سنستعرض في هذا الفصل أولا الاهتزازين الحر و الإجباري الميكانيكيين، و نقارن بينهما، وبـــين الاهتـــزازين الحـــر و الإجبـــاري الكهربائيين، بحيث نستطيع أن نتصور الكيفية التي يـــتم بهـــا الاهتـــزاز الكهربائي .

بعد استعراض خصائص دارات الاهتزاز الحر الكهربائي ســـوف نعالج وبالتفصيل الدارات الكهربائية التي تجبر علـــى الاهتـــزاز و بتـــردد يساوي ترددها الذاتي ونسمي هذه الدارات "دارات الطنين ".

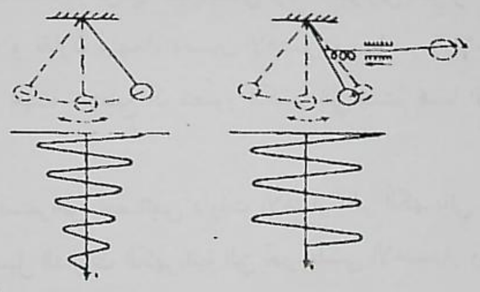
٥-١ : الاهتزازات الحرة و الاهتزازات الإجبارية :

نحمّل نواساً ميكانيكياً ونابضاً موجودين في وضع الراحة بثقل ما بتأثير خارجي يمكن:

١- حرف النواس والنابض عن وضع الراحة لمرة واحدة ثم تركهما يهتزان اهتزازاً حراً كما في الشكل (٥-١- آ).

٢- تحريض النواس والنابض بتأثير خارجي تحريضاً دورياً ليهتز اهتزازاً إجبارياً دائماً كما في الشكل (٥-١- ب).

في هذه الحالة يهتز النواس والنابض اهتزازات حرة دورية بتردد مساوٍ للتردد الذاتي للنواس والتردد الذاتي للنابض. وبسبب الضياع يمكن التغلب خلال الاهتزاز على مطال الاهتزاز (مدى الاهتزاز) ببطء حتى يعود النواس والنابض بعد زمن معين إلى وضع الراحة (وضع الهدوء، الشكل (٥-١-آ).



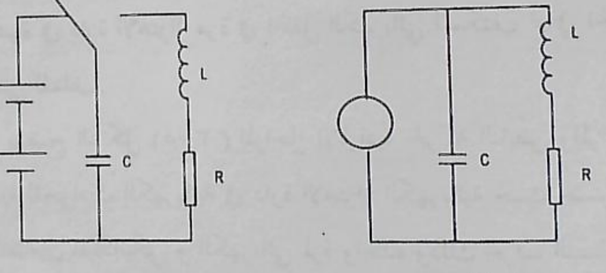
ب – اهتزاز إجباري   آ – اهتزاز حر

الشكل (٥-١) آلة النواس الميكانيكي [11]

في الحالة الثانية يهتز النواس والنابض اهتزازات إجبارية دورية إذ يتم تحريضها على الاهتزاز بتأثير خارجي. والتحريض الخارجي هو إجبار

النظام القابل للاهتزاز على الاهتزاز بتردد ما من خارج النظام بواسطة عنصر ترابط.

لا يجب في هذه الحالة أن يكون تردد التحريض الخارجي مساوياً للتردد الذاتي لنظام الإهتزاز الحر المجبر على الإهتزاز. وكما هو معلوم فإن قيم عناصر دارة الاهتزاز أو نظام الاهتزاز تحدد التردد الذاتي للاهتزاز الحر. وبذلك يهتز النواس في حالة التحريض الخارجي باستمرار و باهتزازات مطالها ثابت، وترددها مساو تردد المحرض على الاهتزاز، كما في الشكل (٥-١-ب). وتتعلق قيمة مطال الاهتزاز بشدة التحريض الخارجي وبمقدار تقارب تردد التحريض الخارجي المطبق على النواس مع التردد الذاتي للنواس.



الشكل (٥-٢) دارة اهتزاز كهربائية تفرعية [11]

تمتلك دارات الاهتزازات الكهربائية (دارات الطنين) سلوكاً مشابهاً لدارات الاهتزازات الميكانيكية، ويمكن أيضاً تحريض دارات الإهتزاز الكهربائية أما بنبضة لمرة واحدة لتهتز اهتزازات حرة متخامدة ،

أو تحريضها على الاهتزاز بربطها بمولد متناوب لتهتز اهتزازات إجبارية دائمة. و يبين الشكل (٥-٢) دارتين كهربائيتين أولاهما تكافئ الحالة الأولى وهي التحريض الدائم على الاهتزاز .

٥-١-١: الاهتزاز الحر :

يمكن فهم الحوادث الكهربائية في دارة اهتزاز كهربائية (دارة طنين) محرضة على الاهتزاز لمرة واحدة على أفضل وجه إذا ما قورنت بالحوادث الميكانيكية في النابض الميكانيكي المحرض على الاهتزاز لمرة واحدة .

كما هو معروف يتم في النابض المهتز تحول مستوى القدرة الميكانيكية من الشكل الكامن إلى الشكل الحر و بالعكس. في دارة الاهتزاز الكهربائية تحول القدرة الكهربائية أيضاً شكلها دورياً إذ تحوي هذه القدرة في دارة الاهتزاز مرة في الحقل الكهربائي للمكثف ثم في الحقل المغناطيسي للملف.

يوضح الشكل (٥-٣) المراحل الإفرادية لحركة النابض والمراحل الإفرادية للحوادث الكهربائية في دارة الاهتزاز الكهربائية حيث حرض كلا النظامين الميكانيكي و الكهربائي لمرة واحدة وذلك بحرف النابض عن وضع الراحة لمرة واحدة و شحن المكثف لمرة واحدة ثم تركهما لذاتهما. وقد أدرجت تحت رسومات المراحل الإفرادية في الشكل(٥-٣) قيم الاهتزاز المميزة لكلا النظامين في لحظات معينة متتالية [11].

الشكل (٥-٣ - a): كلتا الدارتين الميكانيكية و الكهربائية في حالة سكون ، إذ تكون الكتلة m في وضع التوازن ويكون المكثف غير مشحون ولا يمتلك الملف حقلاً مغناطيسياً (أي أن u و i مساويان للصفر).

الشكل (٥- ٣- b): يحرض كلا النظامين لمرة واحدة وذلك برفع الكتلة m إلى الارتفاع a وبشحن المكثف إلى التوتر u (المكثف موجود في دارة الاهتزاز إلا أن المفتاح S مغلق وبالتالي فإن دارة الاهتزاز مفتوحة). وتمتلك الآن كلتا الدارتين قدرة ساكنة إذ تمتلك دارة الاهتزاز الميكانيكية القدرة الكامنة:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D a^2 \quad (5,1)$$

وتمتلك دارة الاهتزاز الكهربائية القدرة الكهربائية:

$$E_{el} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (5,2)$$

نترك الآن الكتلة m المرفوعة إلى الارتفاع a ونصل المكثف C المشحون بالشحنة q بإغلاق المفتاح S. وبذلك يبدأ كلا النظامين بالاهتزاز.

الشكل (٥-٣- c): تمر الكتلة m خلال اهتزازها إلى الأسفل عبر وضع الراحة الأصلي بأقصى سرعة. وفي اللحظة نفسها يكون المكثف قد أفرغ شحنته خلال الملف ويتلاشى بذلك حقل المكثف الكهربائي. مقابل ذلك يبني التيار المار في الملف حقلاً مغناطيسياً قوياً. وفي هذه اللحظة تكون

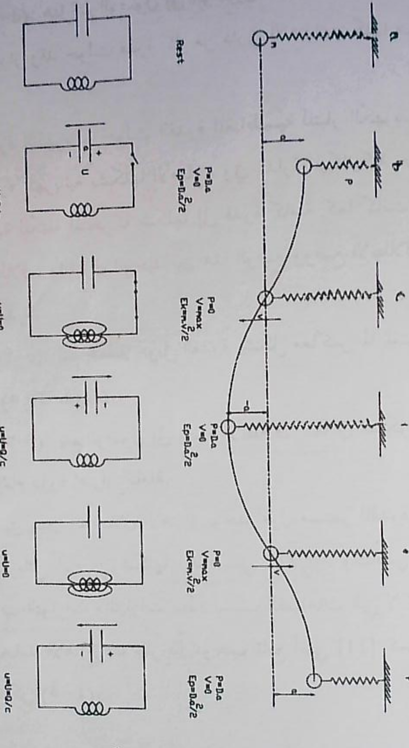
القدرة الكهربائية الأصلية للمكثف E_{el} قد حولت نفسها إلى قدرة مغناطيسية للملف E_{mag}.

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L I^2 \qquad (5,3)$$

وبشكل مكافئ تكون القدرة الكامنة للنابض المضغوط E_{pot} قد حولت نفسها إلى قدرة حركية للكتلة المهتزة E_{kin}.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m V^2 \qquad (5,4)$$

ويأتي الآن أهم ما في الأمر: بما أن للتيار وللحقل المغناطيسي بشكل مشابه للكتلة عطالة ما (تكافئ الكتلة m التحريض L) فلا يتوقف التيارعن السريان فجأة عند وصول توتر المكثف إلى الصفر، بل يستمر التيار بالسريان بالاتجاه نفسه لفترة ما وذلك بسبب التأثير التحريضي للحقل المغناطيسي المتناقص، حيث يعمل التأثير التحريضي على عرقلة بناء الحقل. خلال ذلك يشحن التيار المكثف بقطبية معاكسة للقطبية الأصلية. ويعمل التوتر المعاكس الناشئ تدريجياً على السعة C على إنقاص قيمة التيار تدريجياً حتى الصفر. ويحدث شيء مشابه للكتلة m هنا أيضاً لا تتوقف الكتلة m عن الحركة فجأة وتعود إلى وضع السكون عند مرورها في وضع الراحة على الرغم من زوال ضغط النابض في وضع الراحة. وتستمر الكتلة بالحركة عابرة وضع الراحة وتتجاوزه بسبب عطالتها، وتستمر الكتلة بحركتها حتى يستهلك التوتر المتزايد للنابض المتمدد (بقطبية معاكسة) القدرة الحركية للكتلة.



الشكل (٥-٣) مراحل حركة النابض والحوادث الكهربائية في دارات الاهتزاز

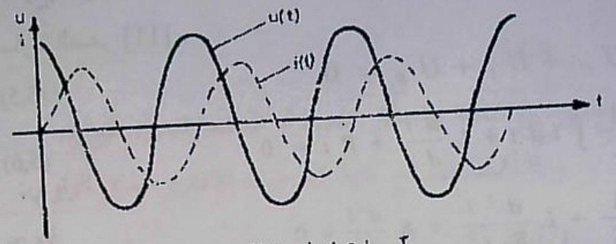
الشكل (٥-٣-d): هنا يتم الوصول إلى الوضعين النهائيين للنصف الأول من دورة الاهتزاز وقد حولت قدرة كل من دارتي الاهتزاز شكلها مـرة أخرى.

في الدارة الكهربائية حولت القدرة المغناطيسية للتيار الكهربـائي نفسها إلى قدرة كهربائية بشكلها الأصلي، وفي الدارة الميكانيكية حولت القدرة الحركية للكتلة المتحركة شكلها إلى قدرة كامنة كما كانت عليه في لحظة الانطلاق. والفارق الوحيد بين هذا الوضع ووضع الانطلاق هو تغير إشارة القدرة.

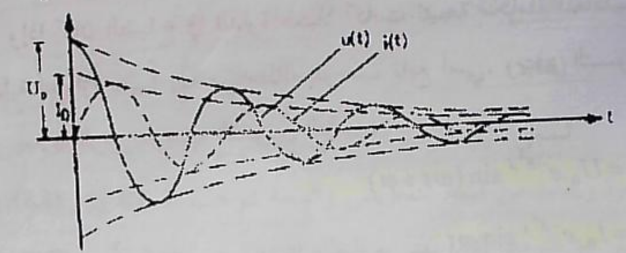
الشكل (٥-٣-e): تتم عملية تحويل القدرة بشكل معاكس لما تمت عليه في الشكلين (٥-٣-b و c).

الشكل (٥-٣-f): يتم الوصول إلى وضع الانطلاق كما في الشكل (٥-٣-b) بعد إتمام دورة اهتزاز كاملة.

مما سبق يتبين أنه خلال الاهتزاز يوجد تحول مستمر للقدرة بـين شكلها الكهربائي $\frac{1}{2}cu^2$ وشكلها المغناطيسي $\frac{1}{2}LI^2$. وتتناقص خلال ذلك مطالات التوترات والتيارات ببطء بسبب الضياعات التي لا يمكـن تجنبها، وتتخامد الاهتزازات تدريجياً بموجب تابع أسي [11] كما هـو مبين في الشكل (٥-٤).



آ ـ اهتزاز غير متخامد



ب ـ اهتزاز متخامد

الشكل (٥-٤)

٥-١-٢: القيم المميزة للاهتزاز الحر المتخامد:

نشتق فيما يلي أهم القيم المميزة لدارة كهربائية تهتز اهتزازاً حراً متخامداً. إلا أننا لن نجري عملية اشتقاق معادلتي الاهتزاز بدقة كما أننا لن نناقش أشكال الهزات الإفرادية بعلاقة ظروف التخامد.

نحصل على معادلتي الاهتزاز بمكاملة المعادلة التفاضلية الموضوعة بمساعدة قانون كيرشوف الثاني. وبما أن دارة الاهتزاز لا تغذى بقدرة كهربائية من خارجها (لا تطبق عليها قوة محركة كهربائية) فإنه يجب أن

يكون مجموع التوترات الجزئية على L و C ومقاومة الضياع R في كل لحظة مساوياً الصفر [11] .

$$U_C + U_l + U_R = 0 \qquad (5,5)$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \qquad (5,6)$$

$$\frac{1}{C} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} = 0 \qquad (5,7)$$

وإذا كان الضياع في الدارة ضئيلاً كانت نتيجة مكاملة المعادلـة التفاضلية اهتزازاً جيبياً يتناقص مطاله بموجب تابع أسي. ويتغير التـوتر والتيار بعلاقة الزمن بموجب القانونين التاليين:

$$u = U_0 . e^{-\delta^{\circ} . t} \sin(\omega t + \varphi) \qquad (5,8)$$

$$i = I_0 . e^{-\delta^{\circ} . t} \sin \omega t \qquad (5,9)$$

حيث : U_0 و I_0 مطالا اهتزاز التوتر والتيار في اللحظة t=0.

δ° ثابت التخامد.

إذا كان التوتر الذي يشحن به المكثف في اللحظـة t=0 (تـوتر شحن المكثف الابتدائي) معروفاً نحصل على قيمة I_0 من الحقيقة التاليـة وهي أن القدرة الكهربائية الابتدائية للمكثف $\frac{1}{2}cu_0^2$ تحول نفسها كلياً بعد ربع دورة إلى قدرة مغناطيسية للملف $\frac{1}{2}LI_0^2$ وذلـك إذا أهملنـا الضياع خلال هذا الزمن الصغير.

$$\frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 \qquad (5,10)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{L/C}} = \frac{U_0}{Z_0} \quad (5,11)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5,12)$$

وتسمى Z_0 ممانعة الاهتزاز المميزة أو الممانعة المميزة للدارة.

وإذا أهملنا الضياع كلياً كان تردد الاهتزاز الذاتي الزاوي:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5,13)$$

ويكون الزمن اللازم لإتمام هزة واحدة T_0 وهو:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \rightarrow T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (5,14)$$

تسمى f_0 التردد الذاتي لدارة اهتزاز عديمة الضياع تهتز اهتـــزازاً حراً ويحدد من قيمة التحريض والسعة بموجب المعادلة (5,13) و (5,14).

f_0 هو التردد الذي يهتز به النظام اهتزازاً حراً بدون تأثير خارجي.

إذا قارنا بين المعادلة (5,14) الخاصة بدور الاهتزاز (الزمن الـــلازم لإتمام هزة واحدة) في دارة اهتزاز كهربائية والمعادلة المعروفة الخاصة بدور اهتزاز النواس الميكانيكي:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad (5,15)$$

وإذا قارنا بين كل العلاقات الكهربائية والعلاقـــات الميكانيكيـــة المدرجة في الشكل (٥-٣) رأينا بوضوح أن القيم الكهربائيـــة والقـــيم الميكانيكية متكافئة.

يقوم التحريض L في الدارة الكهربائية مقام الكتلة ذات العطالة m في الدارة الميكانيكية. وتمثل m المقاومة ضد أي تغيير في الحركة كما تمثل L المقاومة ضد أي تغيير في التيار. وكلما كبرت L أو m بطوت الاهتزازات.

كذلك يكافئ انحراف الكتلة m الشحنة الكهربائية q، ويتكافأ تفاضل هاتين القيمتين بالنسبة للزمن

$$\frac{dq}{dt}=i \qquad (5,16)$$

$$\frac{da}{dt}=\theta \qquad (5,17)$$

ويتضح بسهولة أن التوتر الكهربائي U وتوتر النابض الميكانيكي P (القوة P) يمارسان الدور نفسه، كذلك يتضح من العلاقتين :

$$P = D.a \qquad \& \qquad U=\frac{1}{c}q \qquad (5,18)$$

أن عامل النابض D ومقلوب السعة $\frac{1}{c}$ متكافئان.

ناقشنا فيما سبق دارة اهتزاز عديمة الضياع. وفي الحالات التي يكون فيها الضياع كبيراً بحيث لا يمكن إهماله يخمد النظام المهتز اهتزازاً حراً بشدة ولا يمكن عندها حساب التردد الذاتي بموجب المعادلة (5,13) .($\omega_0=\frac{1}{\sqrt{lc}}$)

وتقدم الحسابات النظرية العلاقة التالية لحساب تردد الاهتزاز الذاتي عندما يكون التخميد شديداً.

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\delta^{*2}} \qquad (5,19)$$

$$\omega_0=\sqrt{\omega_0^2-\delta^{*2}} \qquad (5,20)$$

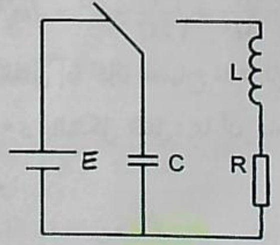
يسمى الحد $\delta^*=\frac{R}{2L}$ ثابت التخامد، ويجب التمييز بينه وبين زاوية الضياع δ. وتعبير δ^* يعبر عن تناقص مطال الاهتزاز الأسي في المعادلتين (5,8) و (5,9).

$$\tan\varphi=\frac{\omega}{\delta^*} \qquad (5,21)$$

مسألة (٥-١):

لدينا دارة الاهتزاز المبينة في الشكل (٥-٥) حيث $C=500[PF]$ و $L=0,18[mH]$ عامل ضياع الدارة $d=0,04$ نشحن المكثف إلى $U_0=1000[V]$ ثم نوصله على الفرع (R-L) . المطلوب حساب:

١- التردد الذي تتم به الاهتزازات.



الشكل (٥-٥)

٢- الزمن اللازم وعدد الاهتزازات التي تتم حتى ينخفض مطال الاهتزاز إلى نصف قيمته الابتدائية.

٣- القيمة العظمى للتيار I_0 في لحظة الابتداء.

٤- الانزياح في زاوية الطور بين **i , u**.

الحل:

١- التردد الذي تتم به الاهتزازات:

إذا أهملنا الضياع في الدارة يكون التردد الذاتي بموجب المعادلة (5,13).

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.18.10^{-3}\,500.10^{-12}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{9.10^{-14}}} = 3,33.10^6 [rad/s]$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0,53.10^6 [HZ]$$

أما إذا افترضنا الضياع غير قابل للإهمال فنحسب تردد الاهتـــزاز الذاتي بموجب المعادلة (5,19).

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^{\bullet 2}} = \sqrt{\omega_0^{\bullet 2} - \delta^{\bullet 2}}$$

$\omega_0^{\bullet}$ تردد الاهتزاز الذاتي إذا كان الضياع قابلاً للإهمال.

نحدد قيمة $\delta*$ بالشكل التالي: بما أن عامل ضياع الدارة المبينة في الشكل (٥-٥) هو:

$$d = \frac{R}{\omega L}$$

وثابت التخامد هو:

$$\delta^{\bullet} = \frac{R}{2L}$$

يكون:

$$\delta^{*} = \frac{d.\omega_0^{*} L}{2L} = \frac{d.\omega_0^{*}}{2} = \frac{0,04.3,33.10^6}{2}$$
$$= 66600[Hz]$$

$$\omega_0 = \sqrt{(3.33.10^6)^2 - (0.0666.10^6)^2} \approx \omega_0^{*}$$

منه يتبين أن تردد الاهتزاز الذاتي لدارة الطنين هو نفسه تقريباً إذا ما أخذ الضياع بالحسبان طالما أن هذا الضياع ضئيل نسبياً. ويلاحظ تأثير الضياع فقط في شدة الانخفاض الأسي لمطال الاهتزاز.

٢- الزمن اللازم وعدد الاهتزازات التي تتم حتى ينخفض مطال الاهتزاز إلى نصف قيمته الابتدائية.

ينخفض مطال الاهتزاز إلى نصف قيمته الابتدائية $\frac{U_0}{2}$ عندما تنخفض قيمة العامل $e^{-\delta^{*} t}$ في المعادلة (5,8) من قيمة 1 في الزمن (t=0) إلى قيمة 0,5 في الزمن $t = t_H$ أي:

$$\ln e^{-\delta^{*} t_H} = \ln 0,5 = -\ln 2 = -0,7$$

$$t_H = \frac{0.7}{\delta^{*}} = \frac{0.7}{66600} = 10,5.10^{-6}[s]$$

ويسمى الزمن $t_H = 10,5[\mu s]$ زمن نصف القيمة. وبما أن زمن الهزة الواحدة

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{0,53.10^6} = 1,885.10^{-5} \approx 1,9[\mu s]$$

نرى أنه تتم من 0 إلى 6 هزات خلال زمن نصف القيمة t_H.

٣ – القيمة العظمى للتيار في لحظة الابتداء:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z_0}$$

حيث:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0,18.10^{-2}}{500.10^{-13}}} = 600[\Omega]$$

$$I_0 = \frac{1000}{600} = 1,67[A]$$

٤- الانزياح في زاوية الطور بين u و i:

نحسب زاوية الطور φ من المعادلة (5,21).

$$\tan\varphi = \frac{\alpha}{\delta *} = \frac{3,33.10^6}{66600} = 50 \rightarrow \varphi \approx 90^0$$

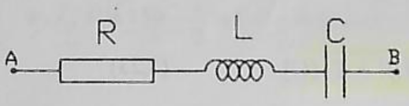
أي أن التوتر والتيار في دارة اهتزاز تهتز اهتزازاً حراً وذات تخامد ضئيل متزاحان عن بعضهما بمقدار 90 درجة تقريباً.

٥–٢: دارات الطنين الكهربائية :

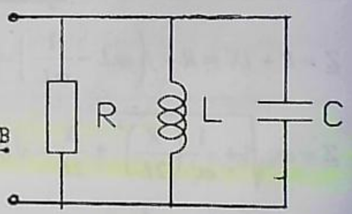
رأينا وصل (R-L) و (R-C) و (C-L) على التسلسل وعلى التفرع وتعرفنا على ظاهرة الطنين عند وصل (C-L) على التسلسل وعلى التفرع.

وتبين لنا أن تأثير أحد هذين العنصرين يعاكس الآخر، وقد يزيله عند وصلهما على التسلسل أو على التفرع، وبذلك تصبح الممانعة الكلية

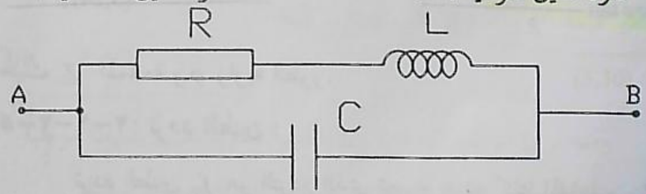
لعنصرين L وC عند وصلهما على التسلسل أصغر من ممانعة أحد العنصرين ذي القيمة الأكبر، وتصبح في حالة الطنين مساوية الصفر. وتصبح السماحية الكلية للعنصرين L و C عند وصلهما على التفرع أصغر من سماحية أحد العنصرين ذي القيمة الأكبر، وتصبح عند الطنين مساوية الصفر، أي تصبح الممانعة الكلية لانهائية في الكبر، إلا أنه يوجد للملف مقاومة أومية بالإضافة إلى التحريض وللمكثف مقاومة أومية بالإضافة إلى السعة لذا يجب مراعاة وجود مركبة حقيقية R بالإضافة إلى L وC عند وصل ملف ومكثف على التسلسل أو على التفرع يبين الشكل(٥-٦) دارة طنين تسلسلية وتفرعية بحتة وأحد أشكال دارات الطنين المختلطة.



آ- دارة طنين تسلسلية بحتة .



ب — دارة طنين تفرعية بحتة.

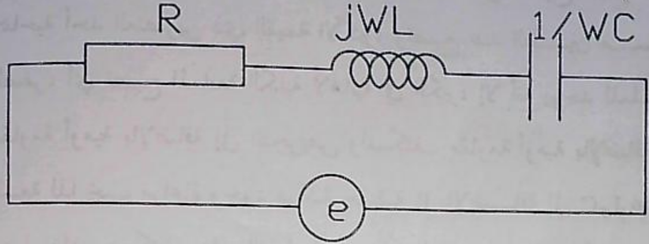


جـ – دارة طنين مختلطة.

الشكل (٥-٦) أشكال دارات الطنين الكهربائي

٥-٢-١ :دارة الطنين التسلسلية:

يبين الشكل (٥-٧) دارة الطنين التسلـسلية والـشكل(٥-٨) المخطط الشعاعي لهذه الدارة [9].



الشكل (٥-٧) دارة طنين تسلسلية

٥-٢-١-١ : ممانعة دارة الطنين التسلسلية:

$$\underline{Z} = R + jX = R + j\left(\omega.L - \frac{1}{\omega.C}\right) = Z.e^{j\varphi}[\Omega] \qquad (5,22)$$

$$\underline{Z} = \omega_0\sqrt{1+\frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{R}{2L}\right)^2} \pm \frac{R}{2L} = \sqrt{R^2+X^2}[\Omega] \qquad (5,23)$$

$$\varphi = arc\tan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega.C}}{R} \qquad (5,24)$$

حيث $\underline{Z}$ الممانعة و φ زاوية الطور.

٥-٢-١-٢ : تردد الطنين :

تردد الطنين f_0 هو التردد الذي تصبح عنده كلتا المفاعلتين $\omega.L$ و $\frac{1}{\omega.c}$ متعاكستي التأثير متساويتين ويصبح مجموعهما مـساوياً الـصفر

$X = 0$، وعند تحريض دارة الطنين بتردد يساوي ترددها الذاتي f_0 تهتز دارة الطنين وتصبح ممانعتها أصغر ما يمكن وتصبح الممانعة الكلية حقيقية ومساوية للجزء الحقيقي منها R

$$(Z)_{\omega=\omega_0} = R \qquad (5,25)$$

ويكون تردد الطنين وتردد الطنين الزاوي.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow fo = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (5,26)$$

من هذه المعادلة نشتق المعادلة العددية التالية:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}} = \frac{159}{\sqrt{L.C}} \qquad (5,27)$$

ويمكن حساب تغير تردد الطنين بالنسبة المئوية عند تغير قيمة التحريض، أو قيمة السعة بالشكل التالي:

$$\ln f_0 = \ln 159 - \frac{1}{2}\ln L - \frac{1}{2}\ln C \qquad (5,28)$$

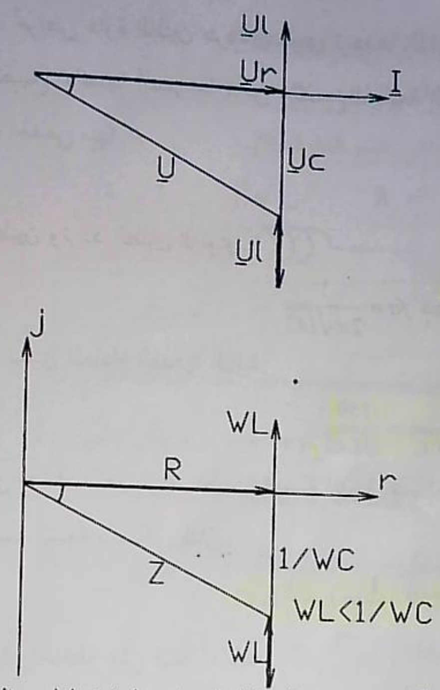
عند تغير قيمة L والمحافظة على قيمة C ثابتة

$$\frac{\Delta fo}{fo} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta L}{L} \qquad (5,29)$$

عند تغير قيمة C والمحافظة على قيمة L ثابتة

$$\frac{\Delta fo}{fo} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta C}{C} \qquad (5,30)$$

ومنه نرى أن تغير قيمة C , L بالنسبة المئوية تغيراً بسيطاً موجباً ينتج نصف هذا التغير في تردد الطنين بالنسبة المئوية ويكون سالبا.



الشكل(٥-٨) المخطط الشعاعي لدارة الطنين التسلسلية

٥-٢-١-٣: المحل الهندسي لممانعة وسماحية دارة الطنين التسلسلية:

من المخطط الشعاعي لدارة الطنين التسلسلية المبين في الشكل (٥-٨-ب) نستنتج المحل الهندسي للممانعة المبين في الشكل (٥-٩) ، ومن المحل الهندسي [7] يتبين أنه عند الترددين $\omega = \omega_{+45}$ و $\omega = \omega_{-45}$ تكون الممانعة

$$Z = R\sqrt{2} \qquad (5,31)$$

وتكون زاوية طور الممانعة $\underline{Z}$

$$\varphi = \pm 45^{o} \qquad (5,32)$$

وتكون القيمة المطلقة للمفاعلة التخيلية مساوية المقاومة الأومية

$$|X|_{\omega_{\pm 45}} = \left|\omega . L - \frac{1}{\omega . C}\right|_{\omega_{\pm 45}} = R \qquad (5,33)$$

عند $\omega = \omega_{+45}$ تكون $\varphi = +45^{o}$ وتكون قيمة X موجبة.

عند $\omega = \omega_{-45}$ تكون $\varphi = -45^{o}$ وتكون قيمة X سالبة.

لا يقل تعريف الترددين $\omega_{\pm 45}$ كترددين مميزين لـــدارة الطـــنين أهمية عن تعريف تردد الطنين ω_0، وتحدد ω_0 بواسطة التحريض والسعة بينما تحدد $\omega_{\pm 45}$ بواسطة التحريض والسعة والمقاومة الأومية.

من العلاقة

$$X = \omega . L - \frac{1}{\omega . C}$$

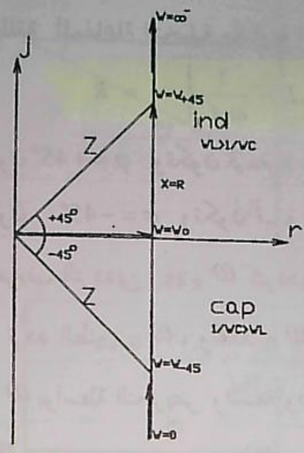
نحصل على علاقة بين ω_0 و $\omega_{\pm 45}$

$$\omega^{2} - \frac{X}{L}\omega - \frac{1}{L . C} = 0 \qquad (5,34)$$

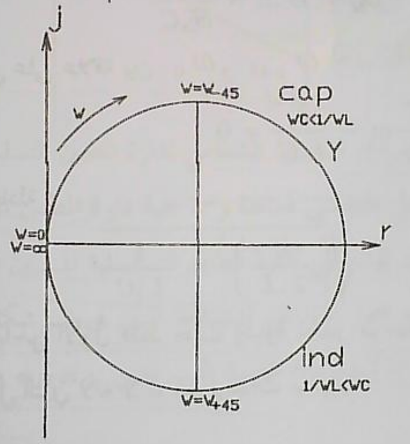
وحل هذه المعادلة :

$$\omega = \frac{X}{2 . L} \pm \sqrt{\left(\frac{X}{2 . L}\right)^{2} + \frac{1}{L . C}} \qquad (5,35)$$

نهتم بالحل الأول فقط حيث إشارة الجذر موجبة لأنه ذو معـــنى فيزيائي، ونهمل الثاني لأنه لا توجد ترددات سالبة.



الشكل(٥-٩) المحل الهندسي لممانعة دارة الطنين التسلسلية



الشكل(٥-١٠) المحل الهندسي لسماحية دارة الطنين التسلسلية

عنـــد $X = 0$ تـــصبح $\omega = \omega_0$ و عنـــد $X = \pm R$ تـــصبح $\omega = \omega_{\pm 45}$، نعوض في المعادلة السابقة :

$$\omega_{\pm 45} = \frac{R}{2.L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2.L}\right)^2 + \frac{1}{L.C}} \qquad (5,36)$$

$$\omega_{\pm 45} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{R}{2.L}\right)^2} \pm \frac{R}{L.C} \qquad (5,37)$$

من هذه المعادلة يتبين أن $\omega_{\pm 45}$ ليستا متناظرتين بالنسبة لتـــردد الطنين بـــل بالنـــسبة ل $\omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{R}{2.L}\right)^2}$ إلا أنـــه عنـــدما تكون $\frac{R}{2\omega_0.L} \langle\langle 1$ يمكننا عد ،انظر الشكل (٥-١١):

$$\omega_{+45} - \omega_0 = \omega_0 - \omega_{-45} \qquad (5,38)$$

يبين الشكل (٥-١٠) المحل الهندســـي لـــسماحية دارة الطـــنين التسلسلية والذي ينجم عن قلب المحل الهندسي للممانعة المبين على الشكل (٥-٩)، والمحل الهندسي للسماحية هو على شكل دائرة تمر مـــن مبـــدأ الإحداثيات، ويقع مركزها على المحور الحقيقي ويساوي قطرها:

$$\frac{1}{Z_{min}} = \frac{1}{R} = G = Y_{max} \qquad (5,39)$$

٥-٢-١-٤: علاقة الممانعة و السماحية بالتردد:

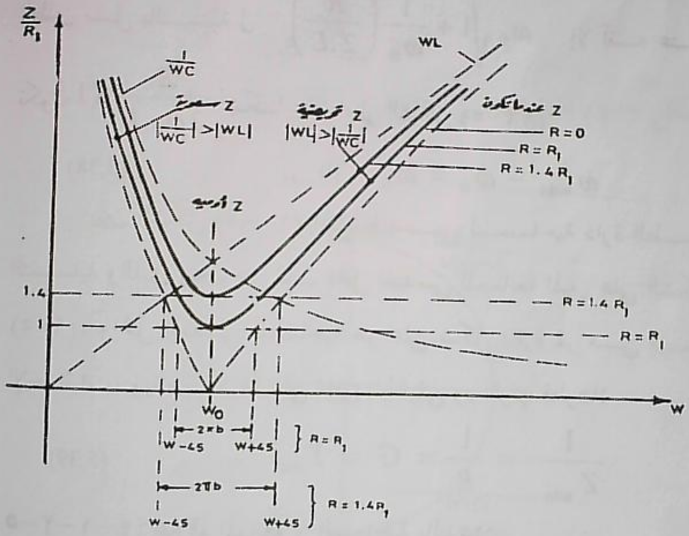
من العلاقة (5,23) نحصل على علاقة الممانعة بالتردد [11] ويبين الشكل (٥-١١) العلاقة

$$\underline{Z} = \sqrt{(\omega.L - \frac{1}{\omega.c})^2 + R^2}$$

$$= R\sqrt{1 + (\frac{\omega.L - \frac{1}{\omega.c}}{R})^2} \qquad (5,40)$$

السماحية هي مقلوب الممانعة:

$$\underline{Y} = \frac{G}{\sqrt{1 + (\frac{\omega.L - \frac{1}{\omega.c}}{R})^2}} \qquad (5,41)$$



الشكل (٥-١١) علاقة الممانعة بالتردد لدارة طنين تسلسلية

٥-٢-١-٥: علاقة زاوية طور الممانعة بالتردد: [11]

$$\varphi = \arctan\ \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{R}{2.L}\right)^2} \qquad (5,42)$$

وتكون زاوية الطور :

$\varphi = 90$ عندما تكون $\omega \rangle\rangle \omega_0$ أي:

$\omega.L \rangle\rangle \frac{1}{\omega.C}$ في الترددات العالية.

$\varphi = -90$ عندما تكون $\omega \langle\langle \omega_0$ أي:

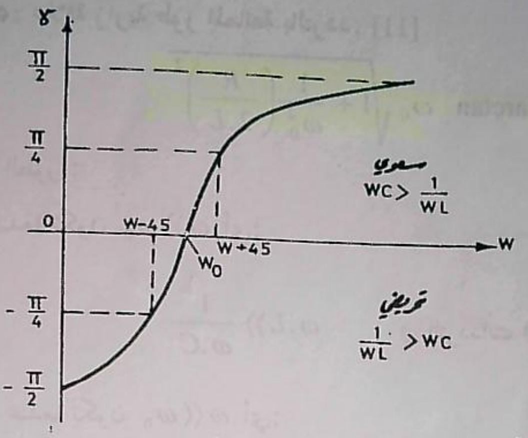
$\omega.L \langle\langle \frac{1}{\omega.C}$ في الترددات المنخفضة.

$\varphi = 0$ عندما تكون $\omega = \omega_0$ أي:

$\omega.L = \frac{1}{\omega.C}$ في حالة الطنين.

$\varphi = \pm 45$ عندما تكون $\omega = \pm 45$ أي:

$R = \left|\omega.L - \frac{1}{\omega.C}\right|$ في حالة الانحراف عن الطنين 45.



الشكل (٥-١٢) علاقة زاوية طور الممانعة بالتردد *لدارة طنين تسلسلية*

٥-٢-١-٦ :القيم المميزة لدارة الطنين التسلسلية:

نعرف فيما يلي ثلاث قيم مميزة:

٥-٢-١-٦-١ : جودة الطنين :

تساوي جودة الطنين ρ نسبة إحدى المركبتين التخيليتين في حالة الطنين إلى المركبة الحقيقية [7].

$$\rho = \frac{\omega_0 . L}{R} = \frac{1}{R} . \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (5,43)$$

عندما تصغر R تكبر جودة دارة الطنين ρ، ويقترب منحني Z من المحور ω كما في الشكل (٥-١١)، كذلك يقترب الترددان $\omega_{\pm 45}$ من التردد ω_0 أي يقل عرض المجال .

٥-٢-١-٦-٢: عرض المجال:

نميز بين عرض المجال المطلق وعرض المجال النسبي:

عرض المجال المطلق [7] هو المجال الترددي بين f_{+45} و f_{-45} المبين علـى الشكل (٥-١١)

$$B_f = f_{+45} - f_{-45}$$

$$B_\omega = \omega_{+45} - \omega_{-45} \qquad (5,44)$$

أما عرض المجال النسبي فهو نسبة عرض المجال المطلق إلى تردد الطنين:

$$\frac{B_f}{f_0} = \frac{B_\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_{+45} - \omega_{-45}}{\omega_0}$$

$$= \frac{\omega_0 . L}{R} = \frac{1}{\rho} \qquad (5,45)$$

ويمكن استخلاص علاقة بين عرض المجال النسبي وجودة الطنين:

$$\omega_{\pm 45} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{R}{2.\omega_0 . L}\right)^2} \pm \frac{R}{2.L}, \qquad \frac{\omega_0 . L}{R} = \frac{1}{\rho}$$

بالتعويض نحصل على :

$$\omega_{\pm 45} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{R}{2.\rho}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2.\rho} \qquad (5,46)$$

وإذا كانت $\rho >> 1$:

$$\omega_{\pm 45} \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2.\rho}\right) \qquad (5,47)$$

وبذلك يكون عرض المجال المطلق وعرض المجال النسبي:

$$B_\omega \approx \omega_{+45} - \omega_{-45} = \frac{\omega_0}{\rho} \tag{5,48}$$

$$\frac{B_\omega}{\omega} \approx \frac{\omega_{+45} - \omega_{-45}}{\omega_0} = \frac{1}{\rho} \tag{5,49}$$

٥-٢-١-٦-٣: الانحراف عن الطنين :

يمكننا كتابة ممانعة دارة الطنين التسلسلية بالشكل:

$$\underline{Z} \approx R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$= R + j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{5,50}$$

ويسمى التعبير بين القوسين بالانحراف عن الطنين V [7] :

$$V = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{5,51}$$

يبين الشكل (٥-١٣) علاقة الانحراف عن الطنين V بالتردد النسبي $\frac{\omega}{\omega_0}$.

V موجب عندما يكون $\omega >> \omega_0$

V سالب عندما يكون $\omega << \omega_0$

V صفر عندما يكون $\omega = \omega_0$

ولا يتناسب الانحراف عن الطنين V تناسباً خطياً مع التردد[11] .

وعندما يكون الانحراف عن الطنين صغيراً أي بجوار تردد الطنين

فيمكن تقريب V بالشكل :

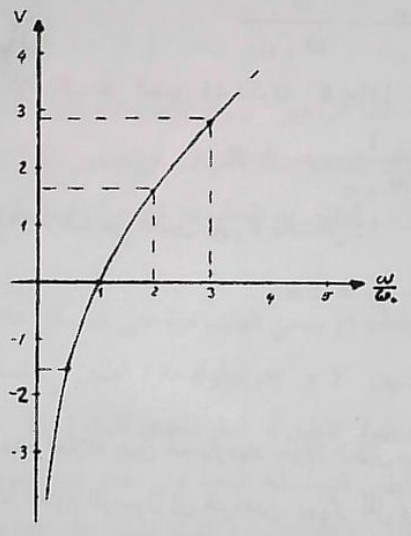
$$V = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0} = \frac{(\omega + \omega_0).(\omega - \omega_0)}{\omega\omega_0}$$

$$= \frac{2.\omega_0(\omega - \omega_0)}{\omega_0^2} \qquad (5,52)$$

حيث:

$$\Delta\omega \approx \omega - \omega_0$$

ويسري مفعول هذا التقريب فقط عندما تكون $\omega = \omega_0$



الشكل (٥-١٣) علاقة الانحراف عن الطنين V بالتردد النسبي $\frac{\omega}{\omega_0}$

وإذا كانت:

$$\frac{2 . \Delta \omega}{\omega_o} = 0,2$$

كان الخطأ الناجم في دارات الطنين التي جودتها $\rho \geq 5$ في حساب الانحراف عن الطنين حتى الترددين اللذين يحددان عرض مجال الدارة أقـــل من 10%.

بالإضافة إلى الانحراف عن الطنين V الانحراف عن الطنين 45 أي الانحراف عن تردد الطنين حتى الترددين $f = f_{\pm 45}$ [7]

$$V_{\pm 45} = \frac{\omega_{\pm 45}}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_{\pm 45}} \qquad (5,53)$$

وبما أنه عند الانحراف عن الطنين 45 تكون $|X| = R$ أي :

$$\omega_{\pm 45} . L = \frac{1}{\omega_{\pm 45}} = \pm R \qquad (5,54)$$

يمكن صياغة الانحراف عن الطنين $V_{\pm 45}$ بالشكل :

$$\omega_{\pm 45} . L - \frac{1}{\omega_{\pm 45} . C} = \pm R \qquad (5,55)$$

$$\frac{\Delta fo}{fo} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta C}{C} \qquad (5,56)$$

من هذه العلاقة يتبين أنه بازدياد جودة الطنين ρ يصبح الانحراف عن الطنين V اللازم للوصول إلى الترددين $f_{\pm 45}$ أقل ويـــصغر عـــرض المجال.

$$\underline{Z} \approx R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$= R\left[1 + \frac{j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}{R}\right] \qquad (5,57)$$

$$= R(1 + j\rho V)$$

$$\frac{\underline{Z}}{R} = (1 + j\rho .V) = \sqrt{1 + (\rho .V)^2}\,.e^{j\varphi} \qquad (5,58)$$

$$\varphi = \arctan(\rho .V)$$
$$Z = R\sqrt{1 + (\rho .V)^2} \qquad (5,59)$$

ومنه يتبين أنه عند الترددين $\omega_{\pm 45}$ تكون $\rho V = \pm 1$ وتصبح الممانعة $Z = \sqrt{2}.R$ أي أن الممانعة عند الانحراف عن الطنين 45 أكبر $\sqrt{2}$ مرة منها في حالة الطنين، وتختلف زاوية طورها 45 عن زاوية طور مقاومة الطنين الحقيقية.

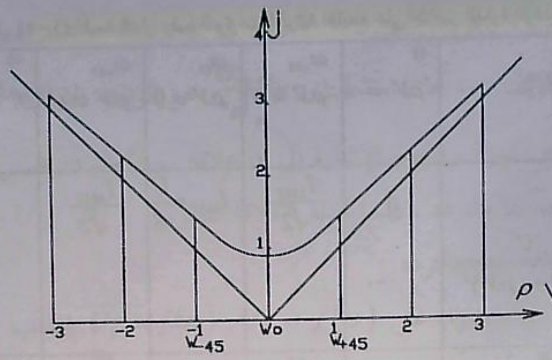
يبين الشكل (٥-١٤) منحني الطنين مرة على شكل علاقة بين Z و ρV وأخرى بين Y و ρV سلوك دارة الطنين التسلسلية بعلاقة التردد عندما يكون التوتر المطبق أو التيار المغذي ثابت [11]

نوصل دارة الطنين التسلسلية البحتة على مولد ذي تردد متغير، ونناقش سلوك الدارة مرة إذا كان توتر المولد المطبق على الدارة ثابت بتغير التردد، وأخرى إذا كان التيار المغذي من المولد ثابت بتغير التردد.

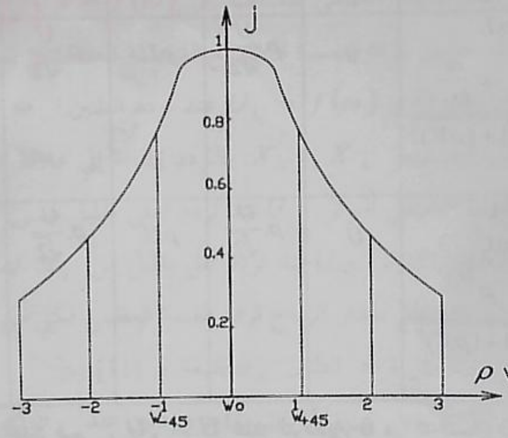
١- التوتر المطبق ثابت بتغير التردد:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{const}{Z} = \frac{const}{R\sqrt{1 + (\rho . V)^2}} \qquad (5,60)$$

تتغير Z بتغير التردد كما في الشكل(٥-١١) وتأخذ قيمة دنيا $Z = R$ عند تردد الطنين وبذلك يتغير التيار الكلي I بتغير التردد ويأخذ قيمة عظمى عند تردد الطنين، ويبين الجدول (٥-١) قيمة التيار الكلي وقيم التوترات الجزئية الهابطة على عناصر الدارة لترددات مميزة.



$$\frac{Z}{R} = f(\rho.V)$$



$$\frac{Y}{G} = f(\rho.V)$$

الشكل(٥-١٤) سلوك دارة الطنين التسلسلية بعلاقة التردد عندما يكون التوتر المطبق أو التيار المغذي ثابتاً

الجدول (٥-١) قيمة التيار وقيم التوترات الجزئية الهابطة على عناصر الدارة لترددات مميزة.

$\omega =$	0 $\rho.V = -\infty$	ω_{-45} $\rho.V = -1$	ω_O $\rho.V = 0$	ω_{+45} $\rho.V = +1$	∞ $\rho.V = \infty$
$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R\sqrt{1+(\rho.V)^2}}$	0	$\frac{I_{MAX}}{\sqrt{2}}$	$I_{MAX} = \frac{U}{R}$	$\frac{I_{MAX}}{\sqrt{2}}$	0
$U_R = I.R = \frac{U}{\sqrt{1+(\rho.V)^2}}$	0	$\frac{U}{\sqrt{2}}$	U	$\frac{U}{\sqrt{2}}$	0
$U_L = I.\omega.L = U\frac{\rho\frac{\omega}{\omega_O}}{\sqrt{1+(\rho.V)^2}}$	0	$\rho.\frac{U}{\sqrt{2}}$	$\rho.U$	$\rho.\frac{U}{\sqrt{2}}$	U
$U_C = I.\frac{1}{\omega.C} = U\frac{\rho\frac{\omega_O}{\omega}}{\sqrt{1+(\rho.V)^2}}$	U	$\rho.\frac{U}{\sqrt{2}}$	$\rho.U$	$\rho.\frac{U}{\sqrt{2}}$	0

وتحدد قيم U_L , U_C عند الترددين 0 ، ∞ بدون إجراء عمليات حسابية إذ يهبط كل توتر على التحريض عند $\omega = \infty$ ($I = 0$) وعلى السعة عند $\omega = 0$ ($I = 0$)

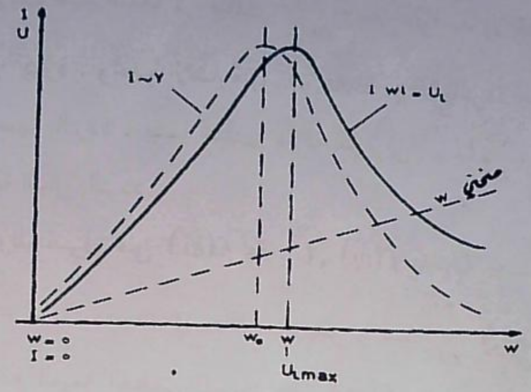
أما قيم U_L , U_C المدرجة في الجدول عند الترددين $\omega_{\pm 45}$ فهي تقريب جيد عندما لا تختلف $\frac{\omega_{\pm 45}}{\omega_o}$ عن الواحد إلا قليلاً أي عندما تكون ρ كبيرة . وتجدر الإشارة إلى أن علاقة U_R بالتردد هي علاقة التيار نفسها بالتردد ، بينما تختلف علاقة التوترين U_L , U_C بالتردد عن علاقة التيار بالتردد.

وللحصول على $U_C = f(\omega)$, $U_L = f(\omega)$ يجب ضرب $I = f(\omega)$ بالتردد ω في حالة التحريض و بـ $\frac{1}{\omega}$ في حالة السعة.

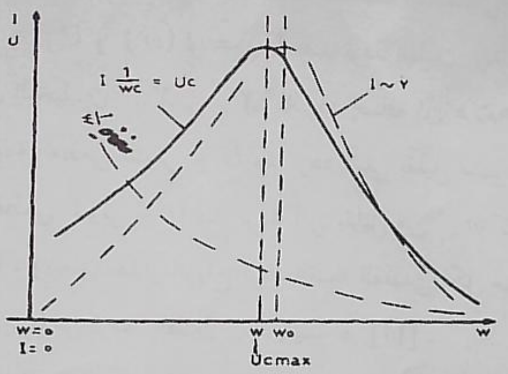
تقع القيمة العظمى للمنحنيين $I = f(\omega)$ و $U_R = f(\omega)$ عند تردد الطنين ω_o بينما لا تقع القيمة العظمى للمنحنيين $U_L = f(\omega)$ و $U_C = f(\omega)$ عند تردد الطنين ω_o بسبب علاقة المفاعلتين التخيليتين X_L , X_C بالتردد إضافة إلى علاقة التيار بالتردد. وتقع القيمة العظمى للتوتر U_L عند تردد أعلى بقليل من ω_o وتقع القيمة العظمى للتوتر U_C عند تردد أقل بقليل من ω_o كما في الشكل (٥-١٥) ، ويتعلق مقدار انزياح تردد القيمة العظمى لكل من التوترين U_L و U_C عن تردد الطنين ω_o بقيمة ρ [11] .

إذا افترضنا $U_{L\max}$ و $U_{C\max}$ موجودتين عند ω_o لقيم $r \geq 5$ يكون لخطأ صغير وقابلاً للإهمال.عندها يمكننا أن نفترض:

$$(U_{c_{\max}})_{\omega_o} = (U_{L_{\max}})_{\omega_o} = RU \qquad (5,61)$$



آ – علاقة الجهد U_L بالتردد

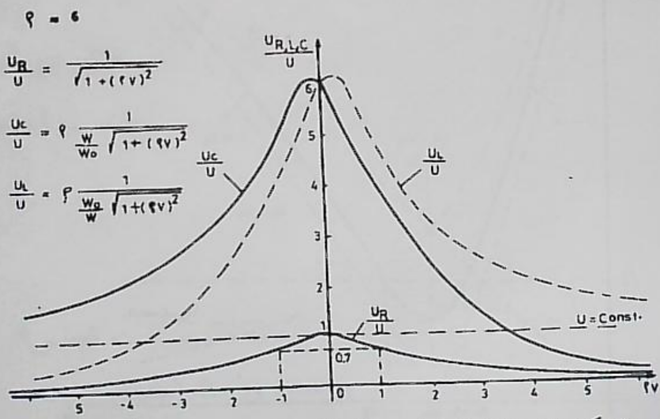


ب – علاقة الجهد U_C بالتردد

الشكل (٥-١٥) التوترات U_L, U_C بعلاقة التردد

على الرغم من كل ذلك تكون U_L و U_c عند $\omega = \omega_o$ متساويتين في القيمة المطلقة ومتعاكستين في زاوية الطور ، بذلك تزيلان بعضهما ويهبط كل التوتر المطبق على دارة الطنين على المقاومة R ويقدم المولد استطاعة حقيقية فقط لدارة الطنين. يبين الشكل (٥-١٦) التوترات U_L و U_R و U_c منسوبة إلى التوتر الكلي U بمدلولية ρV.

عند تصميم دارة طنين تسلسلية يطبق عليها توتر ثابت يجب الانتباه إلى مقدار تحمل مكثف وملف الدارة للتوتر. فإذا كان التوتر المطبق على الدارة $U = 10[V]$ وكانت جودة الطنين $\rho = 10$ عندها يهبط على L و C في حالة الطنين توتر قدره $U = 100[V]$.

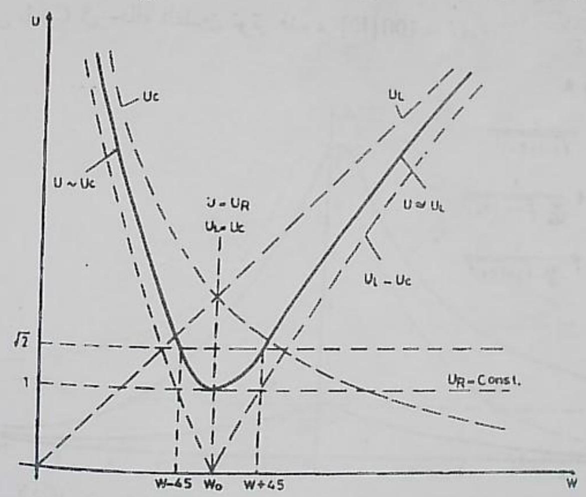


الشكل (٥-١٦) التوترات U_R, U_L, U_C منسوبة إلى U بعلاقة ρV وعندما يكون $U = const$ و $\rho = 6$

٢- التيار المغذي في الدارة ثابت بتغير التردد:

$$U = I.Z = const \quad .Z(\omega)$$
$$U_R = I.R = const \quad .R$$
$$U_L = I.\omega_L = const \quad .\omega$$
$$U_C = \frac{I}{\omega.C} = \frac{const}{\omega} \qquad (5,62)$$

بذلك يتغير التوتر الكلي بعلاقة التردد كما تتغير الممانعة بعلاقة التردد $\frac{Z}{R} = f(\omega)$ (مع أخذ مقياس الرسم بالحسبان).ويأخذ التوتر الكلي الهابط على الدارة قيمة دنيا عند ω_o ويزداد التوتر U_L بعلاقة التردد ازدياداً خطياً بينما يتناقص التوتر U_c بعلاقة $\frac{1}{\omega}$ شكل (٥-١٧)



الشكل (٥-١٧) التوترات U_R, U_L, U_C بعلاقة ω وعندما يكون $I = const$

والسلوك المميز لدارة الطنين التسلسلية المغذاة بتيار ثابت هــو أن التوتر الكلي الهابط على الدارة يأخذ قيمة دنيا عند تردد الطنين ويــصغر كلما صغرت R أي كلما كبرت ρ [11].

الجدول (٥-٢):قيم التوترات الجزئية الهابطة على عناصر الدارة لترددات مختلفة:

$\omega << \omega_o$	$\omega = \omega_{-45}$	$\omega = \omega_o$	$\omega = \omega_{+45}$	$\omega >> \omega_o$
$U = U_c = I.\frac{1}{\omega.c}$	$U = \sqrt{2}.U_R$	$U = U_R = I.R$ $U_c = U_L = \rho.U$	$U = \sqrt{2}.U_R$	$U = U_L = I.\omega.L$

مسألة (٥-٢):

عند تغذية دارة طنين تسلسلية بـــالتوتر U=220[v]=const ينشأ على الـــسعة عنـــد الــتردد 60[HZ] تــوتر أعظمــي قــدره 3,5[kv]. تحريض الدارة 80[H].

١-احسب سعة الدارة.

٢_احسب جودة طنين الدارة.

٣_عند أي ترددين ينخفض توتر السعة إلى (70%) من قيمته العظمى؟

٤_احسب شدة التيار الذي يسري في الدارة في حالة الطنين .

٥_ احسب شدة التيار الذي يسري في الدارة عند الترددين المشار إليهما في الطلب (٣).

٦_عند أي ترددين يسري 10% من القيمة العظمى للتيار في الدارة. وما هي زاوية طور التيار بالنسبة للتوتر؟

الحل :

١- سعة الدارة من المعادلة :

$$fo = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$c = \frac{1}{4\pi^2 . L . f_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 . 3600 \quad . 80}$$
$$= 0,0879 \quad [\mu F]$$

٢- جودة طنين الدارة :

عند تردد الطنين تكون $\omega = \omega_o$ و $\rho . V = 0$ وبالتالي:

$$\rho = \frac{U_{c \max}}{U} = \frac{3,5 . 10^3}{220} = 15,9 \approx 16$$

٣_الترددان اللذان ينخفض عندهما توتر السعة إلى (70%) من قيمته العظمى:

إن الترددين اللذين ينخفض عندهما توتر السعة إلى 0.7 من قيمته الأصلية هما الترددان ($\omega_{\pm 45}$) ونستطيع هنا أن نعد ($U_{C \max}$) موجودة عند تردد الطنين ω_o لأن ($\rho >> 1$) .وبالتالي

$$\omega_{\pm 45} = \omega_o \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_o^2}(\frac{R}{2 . L})^2} \pm \frac{R}{2 . L}$$

وبما $\rho >> 1$ تكون القيمة تحت الجذر مساوية الواحد تقريباً:

$$\omega_{\pm 45} = \omega_o (1 \pm \frac{1}{2 . \rho})$$

$$f_{\pm 45} = f_o (1 \pm \frac{1}{2 . \rho})$$

$$f_{\pm 45} = 60 \ (1 \pm \frac{1}{2 . 15 \ ,9})$$

$$f_{+45} = 62 \ [HZ]$$
$$f_{-45} = 58 \ [HZ]$$

٤-شدة التيار في حالة الطنين :

$$I = I_{MAX} = \frac{U}{R}$$

ويمكننا تحديد قيمة R من جودة الطنين ($\rho = \frac{\omega_o . L}{R}$) :

$$R = \frac{\omega_o . L}{\rho} = \frac{2 . 3,14 \ .60 \ .80}{15 \ ,9}$$
$$= 1,9 [K \Omega]$$

وبالتالي :

$$I = I_{MAX} = \frac{220}{1900} = 0,115 \ [A]$$

٥- شدة التيار عند الترددين $\omega_{\pm 45}$:

$$I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\pm 45} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = 0,81 \ [mA]$$

٦- الترددان اللذان يسري عندهما $0,1 . I_{max}$:

$$I = \frac{I_{max}}{\sqrt{1+(\rho.V)^2}} e^{j(\arctan \rho.V)}$$

$$\frac{I_{max}}{I} = \sqrt{1+(\rho.V)^2} = 10$$

بالتقريب نستطيع أن نعد ($\rho V = \pm 10$) وبالتالي:

$$V = \pm \frac{10}{\rho} = \pm \frac{10}{16} = \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية وحلها :

$$\omega_{1,2} = \omega_o (\sqrt{1+(\frac{10}{32})^2} \pm \frac{10}{32}$$

$$f_1 = 60(1,04 + 0,31) = 81[HZ]$$
$$f_2 = 60(1,04 - 0,31) = 44[HZ]$$

يسري عند هذين الترددين (10%) من التيار الذي يسري في حالة الطنين.

نحسب زاوية طور التيار بالنسبة للتوتر عند هذين الترددين من المعادلة التالية :

$$\omega_{1,2} = \omega_o (\sqrt{1+(\frac{10}{32})^2} \pm \frac{10}{32}$$

حيث ($\rho V = +10$) للتردد العلوي و($\rho V = -10$) للتردد السفلي ومنه:

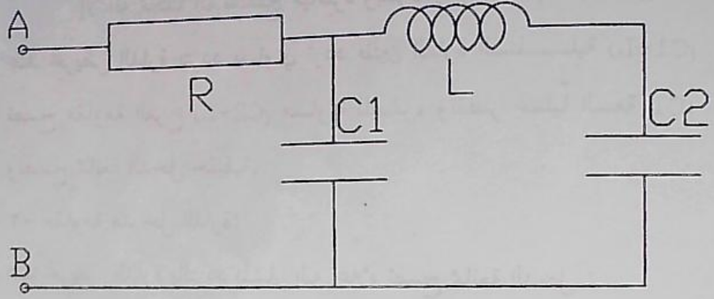
$$\varphi = \pm 4,3^o$$

مسألة (٥-٣):

المطلوب أن تصبح ممانعة مدخل الدارة المبينة في الشكل (٥-١٨) حقيقية **[6]**.

١ــ حدد التردد الزاوي الذي يجب أن تحرض به الدارة.

٢ــحدد مقاومة مدخل الدارة الحقيقية.



الشكل(٥-١٨)

الحل :

١- التردد الزاوي الذي يجب أن تحرض به الدارة :

نكتب ممانعة مدخل الدارة، ونساوي الجزء التخيلي منها بالصفر:

$$Z_{ab} = R + \{\frac{1}{j\omega.c_1} // (\frac{1}{j\omega.c_2} + j\omega.L)\}$$

$$= R + \frac{\frac{1}{j\omega.c_1}(\frac{1}{j\omega.c_2} + j\omega.L)}{\frac{1}{j\omega.c_1} + \frac{1}{j\omega.c_2} + j\omega.L} +$$

وعندما تكون صورة الكسر مساوية للصفر تصبح ممانعة الدخل حقيقية.

$$\frac{1}{j\omega.c_1}\left(\frac{1}{j\omega.c_2}+j\omega.L\right)=0$$

$$\omega_o=\frac{1}{L.C_2}$$

إلا أنه يمكننا أن نستنتج مباشرة وبدون إجراء عمليات حسابية أنه عند تحريض الدارة بتردد يساوي تردد طنين الدارة التسلسلية (C1-L) تصبح مقاومة الفرع (C2-L) مساوية للصفر، وتقصر عملياً السعة C1، وتصبح ممانعة الدخل حقيقية.

٢- مقاومة مد خل الدارة:

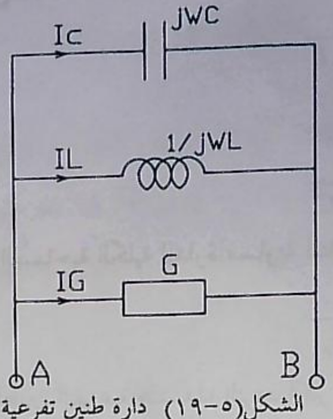
عند تحريض الدارة بالتردد المشار إليه أعلاه تصبح ممانعة الدخل :

$$\underline{Z}=R$$

٥-٢-٢: دارة الطنين التفرعية :

بناء على التكافؤ بين دارة الطنين التسلسلية ودارة الطنين التفرعية يمكن تحويل جميع القوانين التي اشتقت، والأشكال التي رسمت لدارة الطنين التسلسلية لتصبح سارية المفعول لدارة الطنين التفرعية . إلا أننا سنشتق هذه القوانين مرة أخرى لدارة الطنين التفرعية زيادة في التمرين.

يبين الشكل(٥-١٩) دارة الطنين التفرعية البحتة والشكل (٥-٢٠) المخطط الشعاعي لهذه الدارة[9] .



الشكل(٥-١٩) دارة طنين تفرعية

٥-٢-٢-١: سماحية دارة الطنين التفرعية :

$$\underline{Y} = G + j(\omega.c - \frac{1}{\omega.L}) = G + jB \qquad (5,63)$$

$$= Ye^{j\varphi}$$

القيمة المطلقة :

$$Y = \sqrt{G^2 + (\omega.c - \frac{1}{\omega.L})^2} \qquad (5,64)$$

زاوية الطور:

$$\varphi = \arctan \frac{\omega.c - \frac{1}{\omega.L}}{G} \qquad (5,65)$$

٥-٢-٢-٢: تردد دارة الطنين التفرعية :

وهو التردد الذي تصبح عنده المسايرة مساوية للصفر:

$$B = \omega . c - \frac{1}{\omega . L} \qquad (5,66)$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L.C}} \qquad (5,67)$$

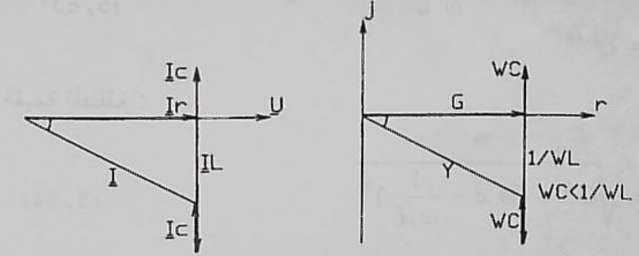
$$f_o = \frac{1}{2\pi \sqrt{L.C}} \qquad (5,68)$$

عند هذا التردد تكون السماحية الكلية للدارة مساوية للناقلية الحقيقية :

$$Y = G = \frac{1}{R_P} \qquad (5,69)$$

وتأخذ الممانعة لدارة الطنين التفرعية عند هذا التردد أكبر قيمة ممكنة:

$$Z = \frac{1}{Y} = R_P \qquad (5,70)$$



الشكل(٥-٢٠) المخطط الشعاعي لدارة الطنين التفرعية

٥-٢-٢-٣: المحل الهندسي لسماحية دارة الطنين التفرعية:

يبين الشكل(٥-٢١) المحل الهندسي لسماحية دارة طنين تفرعية والشكل (٥-٢٢) المحل الهندسي لممانعتها [11].

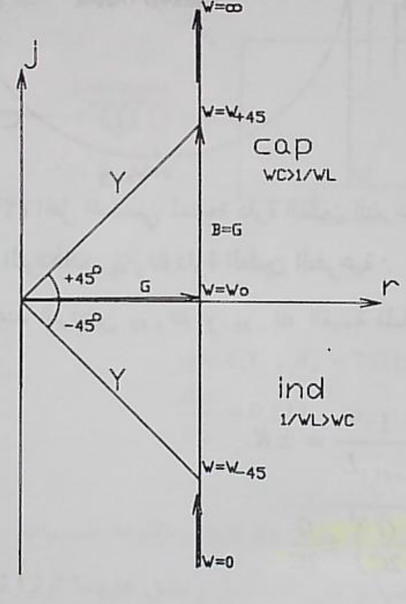
من المحل الهندسي للسماحية يتبين أنه عند الترددين $\omega = \omega_{\pm 45}$ تكون قيمة السماحية الكلية :

$$Y = G\sqrt{2} \qquad (5,71)$$

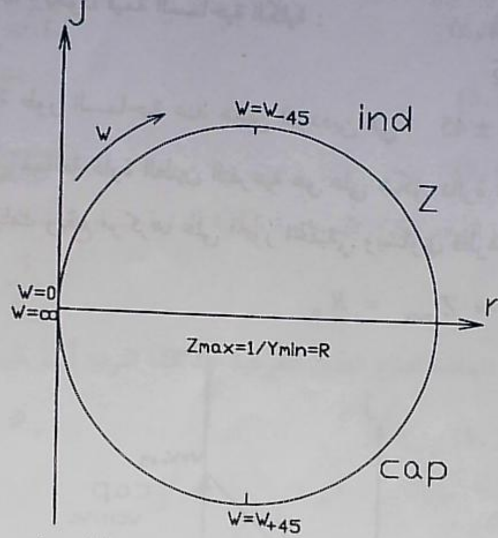
وتكون زاوية طور السماحية عند هذين الترددين هي $\varphi = \pm 45$ ،

والمحل الهندسي لممانعة دارة الطنين التفرعية هو على شكل دائرة تمـر في مركز الإحداثيات ويقع مركزها على المحور الحقيقي ويساوي قطرها :

$$\frac{1}{Y_{\min}} = Z_{\max} = R_p \qquad (5,72)$$



الشكل(٥-٢١) المحل الهندسي لسماحية دارة الطنين التفرعية



الشكل(٥-٢٢) المحل الهندسي لممانعة دارة الطنين التفرعية

٥-٢-٢-٤: الترددان $\omega_{\pm 45}$ دارة الطنين التفرعية :

تكون عند الترددين ω_{+45} و ω_{-45} القيمة المطلقة للمسايرة مساوية للناقلية.

$$\omega_{\pm 45}.C - \frac{1}{\omega_{\pm 45}.L} = \pm R \qquad (5,73)$$

$$\omega_{\pm 45} = \sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{G}{2C}\right)^2} \pm \frac{G}{2C} \qquad (5,74)$$

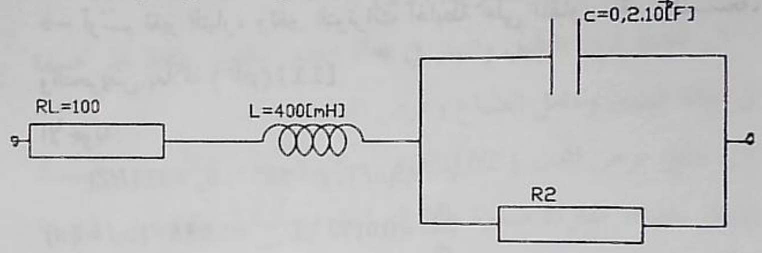
٥-٣: مسائل غير محلولة:

مسألة (٥-٣-١):

نصل مكثفاً سعته $C = 0,2[\mu F]$ ومقاومتـــه $R_2 = 10[K\Omega]$ مع ملف محارضـــته $L = 400\,[mH]$ ومقاومتـــه $R = 100\,[\Omega]$ علـــى التسلسل كما في الشكل (٥-٢٣) المطلوب :

١ــ تحويل هذه الدارة إلى دارة تسلسلية بحتة.

٢ــ حساب تردد الطنين وجودة الطنين وعرض المجال. **[11]**



الشكل ٥-٢٣)

الأجوبة:

$$\rho = 4,7 \quad , B_{\omega} = 745\,[rad\ /s]$$

$$\frac{B\omega}{\omega_o} = 0,212 \quad , \omega_o = 3500\,[rad\ /s]$$

مسألة (٥-٣-٢):

نصل ملفاً تحريضه $0,3[H]$ ومقاومة ضـــياعه $[\Omega]\ 100$ مـــع مكثف عديم الضياع على التسلسل ونطبق عليهما توتراً ثابتاً قيمته الفعالة $100\,[V]$ والمطلوب:

١- أحسب سعة المكثف إذا كانت الدارة تهتز في حالة الطنين على التردد $2[KHZ]$

٢- أحسب جودة الطنين وعرض المجال المطلق والنسبي.

٣- أحسب التوتر الهابط على السعة والتيار المار فيها في حالة الطنين وعندما يكون الانحراف عن الطنين $(V=\frac{1}{\rho})$

٤- أرسم المحل الهندسي لسماحية مدخل الدارة وبين عليه الترددات.

$\omega=\infty \quad \omega=0 \quad \omega=\omega_{-45} \quad \omega=\omega_0$

٥- أرسم تغير التيار، وتغير التوترات الهابطة على المقاومة، والسعة، والتحريض بعلاقة (ρV) [11]

الأجوبة:

$$c=9{,}3[nF]\ ,\ \rho=56{,}5\ \ ,\ B_{\omega}=333[HZ]$$

$$\frac{B\omega}{\omega_o}=0{,}0177\ \ ,\ U_{L_{max}}=5{,}65[KV]\ ,\ I=1[A]$$

مسألة (٥-٣-٣):

دارة طنين تسلسلية تحريضها $L=500\ [\mu H]$ وسعتها $C=500\ [PF]$. في حالة الطنين يسري في الدارة تيار شدته $1[A]$. عند زيادة السعة بمقدار $10\ [PF]$ ينخفض التيار في الدارة المطلوب حساب:

١- عرض مجال الدارة.

٢- مقاومة ضياع الدارة.

٣- التوتر الهابط على التحريض في حالة الطنين. [11]

الجواب:

$$B_f = 10{,}08[KHZ], \; R = 12{,}66[\Omega]$$
$$U_{L_{max}} = 633[V]$$

مسألة (٥-٣-٤):

لـــدينا دارة طـــنين تسلـــسلية مكونـــة مـــن $R = 6[\Omega], L = 0{,}2[H], C = 555\,[PF]$ ويطبـــق عليهـــا التـــوتر $U = 6[V] = const$، والمطلوب: [11]

١_ تحديد تردد الطنين والتيار في حالة الطنين والتوتر الهابط على السعة في حالة الطنين وعامل الضياع وعرض المجال.

٢_ جعل عرض المجال $B_f = 6500\,[HZ]$ بتخميد دارة الطـــنين تخميـــد إضافي بإضافة مقاومة صغيرة على التسلسل مع الدارة R_Z ما هي قيمـــة R_Z؟

الجواب:

$$f_o = 477\,[KHZ], \; R_Z = 2{,}16\,[\Omega], \; d = 0{,}01\,[HZ]$$
$$b_f = 4{,}77, \; U_{C_{max}} = 600\,[V], \; I = 1[A]$$

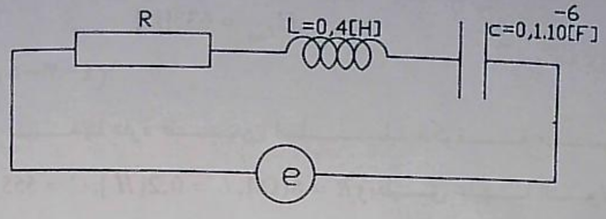
مسألة (٥-٣-٥):

تهتز الدارة المبينة في الشكل (٥-٢٤) في حالة الطـــنين وبجـــودة $\rho = 40$ وتستهلك في حالة الطنين استطاعة حقيقية $P = 242\,[W]$

١- احسب التوتر المطبق على مأخذي الدارة .

٢- احسب الاستطاعة الحقيقة التي تأخذها الدارة عند الترددين $\omega_{\pm 45}$

٣- بإضافة مقاومة R_1 على التفرع مع المقاومة R تصبح جودة الطنين 50 احسب قيمة R_1. [11]



الشكل (٥-٢٤)

الجواب:

$U = 110[V]$, $R_1 = 200[\Omega]$, $P = 121[W]$

مسألة (٥-٣-٦):

تهتز الدارة في الشكل (٥-٢٤) في حالة طنين، وبجودة $\rho = 40$ وتستهلك في حالة الطنين استطاعة $P = 242\ [W]$، أحسب التوتر الهابط على مأخذي الدارة والاستطاعة الحقيقية التي تأخذها الدارة عند الترددين $\omega_{\pm 45}$ [11]

الجواب:

$U = 155[V]$, $P = 242[W]$

مسألة (٥-٣-٧):

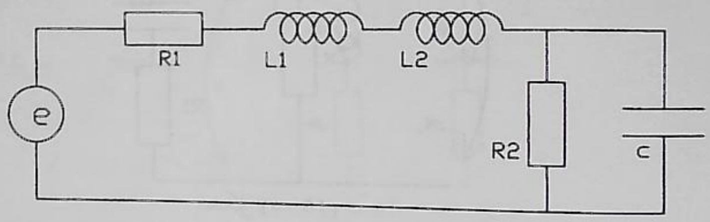
في الدارة المبينة في الشكل (٥-٢٥) ، وإذا كانت قيم العناصر هي:

$$R_1 = 10[\Omega], L_1 = 0,01[H], C = 25[\mu F]$$
$$R_2 = 500[\Omega], \omega_0 = 1500\ [rad\ /s], L_2 = ?$$

المطلوب:

١- حساب قيمة المحارضة L_2 حتى تدخل الدارة في حالة رنين واحسب جودة الرنين وعرض المجال النسبي والمطلق.

٢- إذا كان التوتر المطبق على مدخل الدارة $\underline{U} = 120\ [V]$ احسب الاستطاعات الفعلية والردية والظاهرية وذلك من أجل التردد $\omega = 2000[rad/s]$ **[6]**



الشكل (٥-٢٥)

الجواب:

$$L_2 = 7,73[mH],\quad \rho = 2,33\ ,b_\omega = 643,8\quad ,b\omega/\omega_0 = 0,43$$
$$P = 435,76[W], Q = 625,4[VAr], S = 762,3[VA]$$

مسألة (٥-٣-٨):

في الدارة المبينة في الشكل (٥-٢٦)، لدينا المحددات التالية:

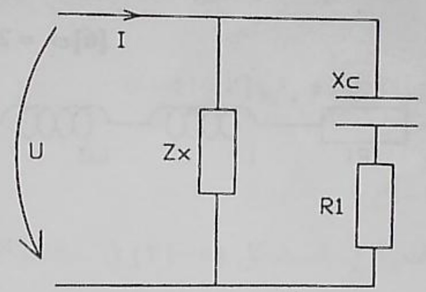
$R_1 = 30[\Omega]\ ,\ X_c = 60[\Omega]\ ,\ \underline{Z}_X = ?[\Omega]$

$\underline{U} = 108\,[V]\ ,\ \omega = 2000\,[rad\ /\ s]\ ,\ \underline{I} = 0{,}72[A]$

المطلوب:

١- حساب قيمة عناصر الممانعة $\underline{Z}_X$ واحسب قيم b_f ، $\omega_{\pm 45}$ ، ρ وكذلك عناصر الدارة التفرعية المكافئة.

٢- إذا كان التردد $\omega = 1000\,[rad\ /\ s]$ احسب الاستطاعات الفعلية والردية والظاهرية .**[6]**



الشكل (٥-٢٦)

الجواب:

$$\underline{Z}_X = 0 + j75[\Omega],\ R_p = 150[\Omega], C_p = 6{,}67[\mu F]$$
$$\rho = 2\ , b_f = 159[HZ]\quad ,\omega_{+45} = 2561{,}6[rad/s]$$
$$\omega_{-45} = 1561{,}6[rad/s],\quad P = 22{,}8[W], Q = 219{,}6[VAr]$$

مسألة (٥-٣-٩):

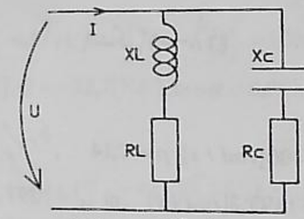
نطبق على مدخل الدارة المبينة على الشكل (٥-٢٧) التوتر $\underline{U}=110[V]$ ، وإذا كانت المحددات هي:

$$R_c = 4[\Omega]\ ,\ R_L = 6[\Omega]\ ,\ L = 6[mH]$$
$$C = ?[\mu F]\ ,\ \omega = 2000\ [rad\ /\ s]$$

المطلوب:

١- حساب قيمة السعة C التي تجعل الدارة في حالة اهتزاز، واحسب قيم $\omega_{\pm 45}$, ρ للسعة الصغيرة.**[6]**

٢- إذا كانت السعة $C = 200\ [\mu F]$ احسب الاستطاعات الفعلية والردية.



الشكل (٥-٢٧)

الجواب:

$$C_1 = 36,127[\mu F],\ C_2 = 4,33.10^{-4}[F],\ \rho = 1,26$$
$$\omega_{+45} = 2947\ [rad\ /\ s]\quad ,\omega_{-45} = 1357\ [rad\ /\ s]$$
$$P = 2,578[W],\ Q = -553,12[VAr]$$

مسألة (٥-٣-١٠):

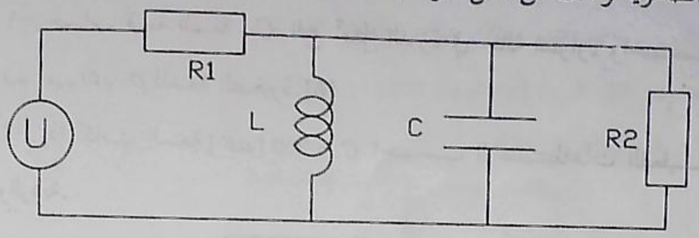
لدينا الدارة المبينة في الشكل (٥-٢٨) وفيها:

$R_1 = 40[\Omega], R_2 = 10[\Omega], L = 10[mH], C = 51[\mu F]$

المطلوب:

١- حساب $\frac{b_f}{f}, b_f, \omega_{\pm 45}, \rho, \omega_0$.

٢- إذا كان التوتر $\underline{U} = 100[V]$ ، احسب الاستطاعات الفعلية والردية والظاهرية وذلك من أجل التردد $\omega = 1000[rad/s]$. [6]



الشكل (٥-٢٨)

الجواب:

$\omega_0 = 1400[rad/s], \rho = 7{,}14 \quad , b_f/f = 0{,}14 \quad , b_f = 31{,}2$

$\omega_{+45} = 1495{,}8[rad/s] \quad , \omega_{-45} = 1297{,}8[rad/s]$

$P = 24{,}65[W], Q = 1{,}2[VAr]$

مسألة (٥-٣-١١):

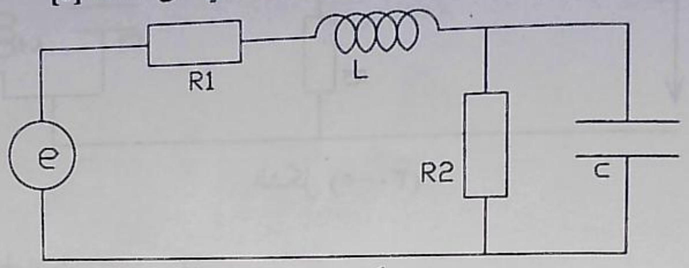
لدينا الدارة المبينة في الشكل (٥-٢٩) وفيها:

$R_1 = 600[\Omega], R_2 = 3{,}92[K\Omega], L = 0{,}8[H]$

$C = 0{,}1[\mu F], e_1 = 1000\sqrt{2}.\sin(2000.t)[V]$

المطلوب: ١- احسب الاستطاعات الفعلية والردية والظاهرية لكل فـــرع من فروع الدارة وعامل الاستطاعة من جهة المنبع.

٢- حساب $\omega_0, \rho, b_f, \frac{b_f}{f}$ والتوتر الأعظمي على الملف. [6]



الشكل (٥-٢٩)

الجواب:

$\omega_0 = 2447[rad/s], \rho = 0{,}74 \quad , {}^{b_f}/_{f} = 1{,}35 \quad , U_{L_{max}} = 741{,}6[V]$

$P = 327[W], Q = -32{,}7[VAr], \cos\varphi = 0{,}995$

مسألة (٥-٣-١٢):

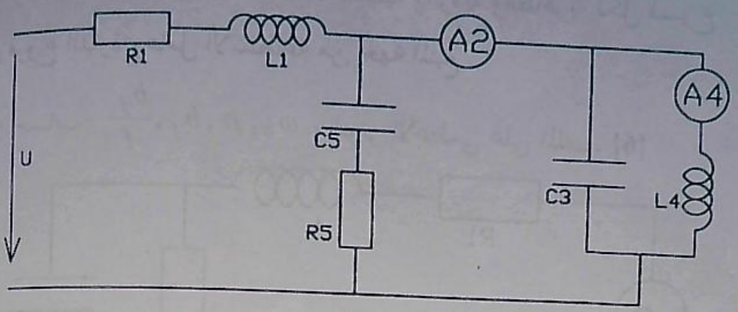
لدينا الدارة المبينة في الشكل (٥-٣٠) وفيها:

$R_1 = 50[\Omega], R_5 = 50[\Omega], L_1 = 0{,}2[H], L_4 = 0{,}1[H]$
$C_3 = 10[\mu F], C_5 = 5[\mu F], U = 200[V]$

المطلوب:

١- تحديد تأشيرة مقياس الأمبير A_4 مع العلم أن تأشيرة مقياس الأمبير A_2 تساوي الصفر

٢- احسب زاوية طور التيار المار في المكثف C_3. [3]



الشكل (٥-٣٠)

الجواب:

$I_4 = 4{,}12\,[A],\ \varphi_3 = 14\,^{o}$

الفصل السادس

الاستطاعة الكهربائية

Electrical Power

بعد أن تعرفنا إلى سلوك الاستطاعة في التيار المتناوب وعلاقاتها في الفصول السابقة، سنعالج في هذا الفصل الاستطاعة في المستوى العقدي.

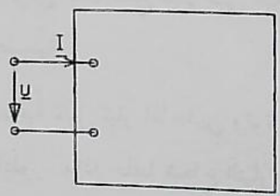
٦-١ : مفهوم الاستطاعة في التيار المتناوب جيبي الشكل: [7]

نطبق على مأخذي ثنائي الأقطاب غير الفعال المبين في الشكل (٦-١) توتراً متناوباً جيبياً من الشكل :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \tag{6,1}$$

فيمر فيه تيار جيبي متناوب من الشكل :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{6,2}$$



الشكل (٦-١) ثنائي أقطاب غير فعال

نميز في التيار المتناوب الجيبي الشكل أربعة تعريفات للاستطاعة التي يقدمها المولد إلى ثنائي الأقطاب غير الفعال وهي:

الاستطاعة اللحظية، والاستطاعة الفعلية، والاستطاعة التخيلية، والاستطاعة الظاهرية.

٦-١-١: الاستطاعة اللحظية أو القيمة اللحظية للاستطاعة:

تمت مناقشة القيمة اللحظية للاستطاعة p(t) في المقطع (٣-٤-٢) وتبين أن الاستطاعة اللحظية هي تابع للزمن بضعف تردد التوتر والتيار المطبقين على مأخذي ثنائي الأقطاب غير الفعال حول قيمة متوسطة، انظر الشكل (٣-١٩)

$$p(t) = U.I.\cos(\varphi_u - \varphi_i) + U.I.\cos(2\omega t + \varphi) \quad (6,3)$$

٦-١-٢: الاستطاعة الفعلية:

الاستطاعة الفعلية هي القدرة المستهلكة في ثنائي الأقطاب غير الفعال في وحدة الزمن كأن تشع مثلاً على شكل حرارة، أو موجات صوتية، أو كهراطيسية.

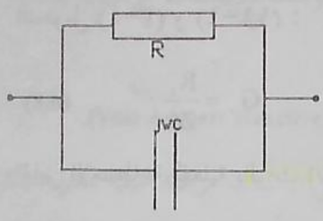
يمكننا شعاعياً تمثيل تيار المأخذين وتوترهما بشعاعين مزاحين عن بعضهما بزاوية الطور. وإذا حللنا شعاع التيار إلى مركبتين الأولى I_r متفقة مع التوتر والثانية I_x مزاحة عن التوتر بزاوية الطور بمقدار 90° ، وعوضنا في المعادلة (٦-١) نرى أن التكامل يأخذ الشكل التالي:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)..i(t).\,dt$$

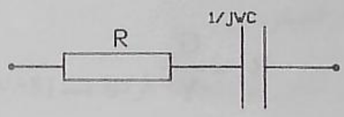
$$p = \frac{1}{T}\int_0^T U_m \cos(\omega t + \varphi_u).I_m \cos(\omega t + \varphi_i).\,dt \qquad (6,4)$$

ويساوي الاستطاعة الفعلية. وتكافئ هذه الحالة وصل عنــصري توصيل على التفرع حيث $(R = \frac{U}{I_r})$ و $(|X| = \frac{U}{I_x})$.

ونتوصل للنتيجة نفسها إذا حللنا شعاع التوتر إلى مركبتين U_r و U_x الأولى متفقة مع التيــار علــى التسلــسل حيــث $(R = \frac{U_r}{I})$ و $(|X| = \frac{U_x}{I})$، شكل (٦-٣).



الشكل (٦-٢)



الشكل (٦-٣)

$$I_r = \frac{U}{R_p} \qquad I_x = \frac{U}{|x_p|} \qquad U_r = I.R_s \qquad U_x = I.|X_s| \qquad (6,5)$$

حيث:

U_r توتر حقيقي I_r تيار حقيقي

Ux توتر تخيلي I_x تيار تخيلي

$$I\cos\varphi = I_r \qquad U.\cos\varphi = U_r$$

$$U = U_r = I_r.R_p \qquad I = I_r = \frac{U_r}{R_s}$$

$$P = I_r.U \qquad P = I.U_r$$

$$P = I^2.R_s = \frac{U_r^2}{R_S} \qquad P = I_r^2.R_p = \frac{U^2}{R_p} \qquad (6,6)$$

وفي كلتا الحالتين

$$P = U.I.\cos\varphi \qquad (6,7)$$

ويمكن تحويل إحدى الدارتين إلى الأخرى بموجب معادلتي التحويل (٤-٣) و (٤-١١) :

$$G_p = \frac{R_s}{Z^2} \qquad R_s = \frac{G_p}{Y^2} \qquad (6,8)$$

تقاس الاستطاعة الفعلية بالوات [W]، ويسمى cos φ عامل الاستطاعة.

٦-١-٣: الاستطاعة الردية:

رمز الاستطاعة الردية هو Q، والاستطاعة الردية هي القدرة الكهربائية التي يتم اختزانها في ثنائي الأقطاب غير الفعال في وحدة الزمن، ثم يعاد توريدها إلى المولد مرة أخرى. ويجب أن يكون ثنائي الأقطاب في هذه الحالة مكوناً من مكثفات وملفات (مقطع ٣-٤-٤) .

من مثلث التيارات ومثلث التوترات نكتب العلاقات التالية للاستطاعة الردية بشكل مكافئ للاستطاعة الفعلية.

$$U\sin\varphi = U_x \qquad I\sin\varphi = I_x$$

$$I = I_x = \frac{U_x}{|X_s|} \qquad U = U_x = I_x|X_p|$$

$$Q = I.U_x = I^2|X_s| = \frac{U_x^2}{|X_s|} \qquad Q = UI_x = I_x^2|X_p| = \frac{U^2}{|X_p|} \qquad (6,9)$$

وفي كلتا الحالتين

$$Q = U.I.\sin\varphi \qquad (6,10)$$

ويجب ملاحظة أن القيمة المتوسطة للاستطاعة الردية تساوي الصفر.

تقاس الاستطاعة الردية بـ [VAR] **(Volt-Ampere Reactive)**.

إذا احتوت ممانعة مدخل ثنائي الأقطاب مركبة تخيلية سعوية يكون الفرق بين زاويتي طور التوتر والتيار سالباً $\varphi_u - \varphi_i = -\varphi$ ونتحدث عند ذلك عن الاستطاعة الردية السالبة.

أما إذا كانت المركبة الردية تحريضية يكون $\varphi_u - \varphi_i = +\varphi$ ونتحدث عن الاستطاعة الردية الموجبة.

وإذا احتوى ثنائي الأقطاب سعة وتحريضاً بآن واحد عندها تزيل الاستطاعتان الرديتان السالبة والموجبة بعضهما، أي تتأرجح الاستطاعة

التخيلية بين السعة والتحريض، ولا يلاحظ المولد تأرجح القدرة ضمن ثنائي الأقطاب. في هندسة نظم القدرة تسمى هذه العملية "تحسين عامل الاستطاعة" وفي تقنية التيار الضعيف تسمى "ظاهرة الطنين".

٦-١-٤: الاستطاعة الظاهرية:

رمز الاستطاعة الظاهرية هو S. والاستطاعة الظاهرية قيمة حسابية ليس لها معنى فيزيائياً. وتحسب الاستطاعة الظاهرية بموجب العلاقة التالية:

$$S = U.I \qquad (6,11)$$

وتساوي حاصل جداء القيمة الفعالة للتوتر والقيمة الفعالة للتيار عند مأخذي ثنائي الأقطاب غير الفعال.

$$U = \sqrt{U_r^2 + U_x^2} \qquad I = \sqrt{I_r^2 + I_x^2} \qquad (6,12)$$

$$S = I\sqrt{U_r^2 + U_x^2} \qquad S = U\sqrt{I_r^2 + I_x^2}$$

وفي كلتا الحالتين

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad (6,13)$$

وتقاس الاستطاعة الظاهرية بالفولط – أمبير [VA].

مسألة (٦-١) :

نطبق على مأخذي مستهلك سعوي عامل استطاعته $\cos\varphi = 0,866$ توتراً قيمته الفعالة $[V]$ 220 وتردده $[HZ]$ 50 فيسري فيهما تيار قيمته الفعالة $[A]$ 8. نغذي المستهلك بالقدرة من مولد عن طريق ناقل تحريضه $[mH]$ 0,1 ومقاومته الأومية $[\Omega]$ 1. المطلوب حساب التوتر وعامل الاستطاعة عند مأخذي المولد.

[7]

طريقة الحل:

الدارة المكافئة للناقل في هذه الحالة هي مقاومة وتحريض على التسلسل، لذلك من المجدي وضع دارة مكافئة للمستهلك مؤلفة من عنصري توصيل موصولين على التسلسل. نرسم الدارة المكافئة الكلية، ثم نرسم المخطط الشعاعي للمستهلك والناقل الموصولين على التسلسل، فإننا نستطيع بكتابة معادلة حلقة عقدية واحدة حساب القيمة المطلقة وزاوية طور التوتر الكلي عند مأخذي الدارة CD.

الحل :

يبين الشكل (٦-٤-أ) الدارة المكافئة للمستهلك والناقل، كما يبين الشكل (٦-٤-ب) المخطط الشعاعي للدارة المكافئة. من الدارة المكافئة نكتب المعادلة التالية بموجب قانون الحلقات:

$$\underline{U}_g = U\cos\varphi + I.R - j(U\sin\varphi - I.\omega L)$$

نعوض $\omega L = 31.4[m\Omega]$ و $I = 8[A]$ وبما أن الحمل سعوي و $\cos\varphi = 0.866$ تكون $\varphi = \varphi_U - \varphi_I = -30^o$ و $\sin\varphi = 0.5$ (أخذت إشارة السالبة بعين الاعتبار عند كتابة معادلة الحلقة).

$$\underline{U}_g = (191-8) - j(110-0,25)$$

$$= (199 - j109,75)[V]$$

$$U_g = \sqrt{199^2 + 109,75^2}[V] = 227[V]$$

$$\varphi_g = \arctan\left(-\frac{109,75}{199}\right)$$

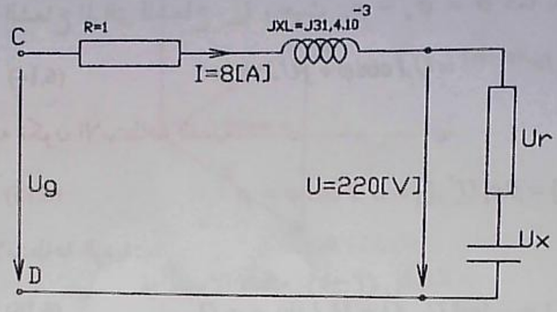
$$\varphi_g = \arctan(-0.55) = -28,5^o$$

وبالتالي يكون عامل الاستطاعة عند مأخذي المولد:

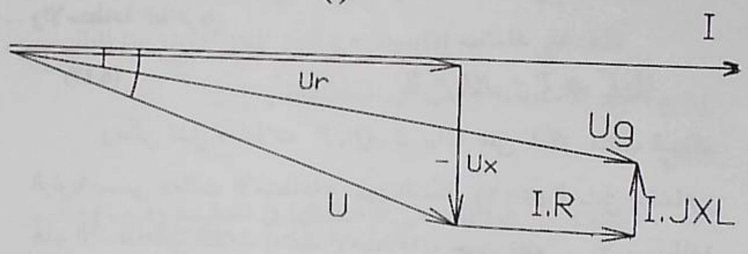
$$\cos\varphi_g = 0.876$$

يظهر هذا التغير في القيمة المطلقة وزاوية الطور (بشكل نوعي) بوضوح من المخطط الشعاعي، شكل (٦-٤-ب) ونلاحظ أن عامل الاستطاعة على مأخذي المولد أفضل منه على مأخذي المستهلك نظراً لأن جزءاً من الاستطاعة التي تتأرجح بين المستهلك والمولد بدون وجود الناقل يؤخذ الآن من الناقل ويتأرجح بين تحريض الناقل والمستهلك. بكلمات

أخرى يمكن القول أن لممانعة الحمل على مأخذي المولد CD مركبة تخيلية أصغر من المركبة التخيلية لممانعة المستهلك عند المأخذين AB.



(أ)



(ب)

الشكل (٦-٤) أ- الدارة الكهربائية

ب- المخطط الشعاعي

٦ ـ ٢ : التمثيل العقدي للاستطاعة: [9]

يمكن تمثيل قيم الاستطاعة المعرفة في الفقرات السابقة كأشعة من حاصل جداء الشعاعين $\underline{U}.\underline{I}^{*}$ أو الشعاعين $\underline{U}^{*}$ و $\underline{I}$ حيث $\underline{U}^{*}$ مثلاً هو الشعاع المرافق للشعاع $\underline{U}$ وحيث $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ كما يلي:

$$\underline{U}.\underline{I}^{*} = U.Ie^{j(\varphi_U-\varphi_I)} = U.I\cos\varphi + jU.I\sin\varphi \qquad (6,14)$$

ومنه تكون الاستطاعة الفعلية:

$$\mathrm{Re}[\underline{U}.\underline{I}^{*}] = \mathrm{Re}[\underline{U}^{*}.\underline{I}] = U.I\cos\varphi = p \qquad (6,15)$$

والاستطاعة الردية:

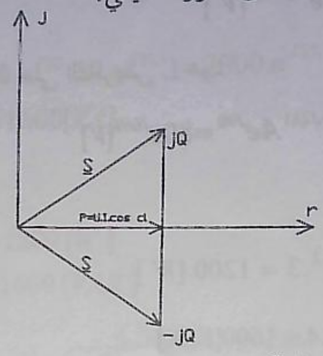
$$\mathrm{Im}[\underline{U}.\underline{I}^{*}] = -\mathrm{Im}[\underline{U}^{*}.\underline{I}] = U.I\sin\varphi = Q \qquad (6,16)$$

والاستطاعة الظاهرية:

$$\underline{U}.\underline{I}^{*} = P + jQ = \underline{S} \qquad (6,17)$$

ويمكن تمثيل معادلات S, Q, P بيانياً على شكل مثلث قائم الزاوية يسمى «مثلث الاستطاعة». يبين الشكل (٦-٥) التمثيل الشعاعي لهذه الاستطاعات الثلاث (مثلث الاستطاعة)، حيث تظهر الاستطاعة الفعلية على المحور الحقيقي، والاستطاعة التخيلية الموجبة على المحور التخيلي الموجب، وهذا يكافئ حملاً تحريضياً، والاستطاعة الردية السالبة على المحور التخيلي السالب وهذا يكافئ حملاً سعوياً، وتكون الاستطاعة الظاهرية في كلتا حالتي الاستطاعة الردية الموجبة والسالبة هي وتر

المثلث، هذا وقد تم الانطلاق في التمثيل الشعاعي للاستطاعات الثلاث من أن شعاع التيار منطبق على المحور الحقيقي.



الشكل (٦-٥) مثلث الاستطاعة

مسالة (٦ ــ ٢):

نطبق على الممانعة $\underline{Z} = 3+j4[\Omega]$ التوتر $\underline{U}= 100e^{j30}$ [V] المطلــــوب رسم مثلث الاستطاعة وتحديد قيم استطاعاته.[7]

الحل:

. انطلاقاً من العلاقات التي تم اشتقاقها في المقطــع (٦ - ١) يمكــن تحديد مثلث الاستطاعة بأربع طرق، لهذا الغرض نحسب أولاً التيار المار في الممانعة $\underline{Z}$.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100.e^{J30^*}}{(3+J4)} = \frac{100.e^{J30^*}}{5.e^{j53,1^*}}$$

$$= 20.e^{-j23,1^*}[A]$$

وبذلك يكون التوتر الهابط على المقاومة R هو:

$$\underline{U}_R = \underline{I}.R = 20.e^{-j23,1}[V]$$

ويكون التوتر الهابط على التحريض L هو:

$$\underline{U}_L = \underline{I}.jX_L = 20e^{-J231}.4e^{J90} = 80e^{J669}[V]$$

الطريقة الأولى:

$$P = I^2.R = 20^2.3 = 1200\,[W]$$

$$Q = I^2.X_L = 20^2.4 = 1600[VAR]$$

$$S = I^2.Z = 20^2.5 = 2000[VA]$$

الطريقة الثانية:

$$P = \frac{U_R^{\;2}}{R} = \frac{60^2}{3} = 1200[W]$$

$$Q = \frac{U_L^{\;2}}{X_2} = \frac{80^2}{4} = 1600[VAR]$$

$$S = \frac{U^2}{Z} = \frac{100^2}{5} = 2000\,[VA]$$

الطريقة الثالثة:

$$P = U.I.\cos\varphi = 100.20.\cos 53,1 = 1200\,[W]$$

$$Q = U.I.\sin\varphi = 100.20.\sin 53,1 = 1600[VAR]$$

$$S = U.I. = 100\ .20\ . = 2200\ [VA]$$

الطريقة الرابعة:

$$\underline{S} = \underline{U}.\underline{I}^{*} = 100.e^{J30}.20.e^{J23,1} = 2000.e^{J53,1}[VA]$$

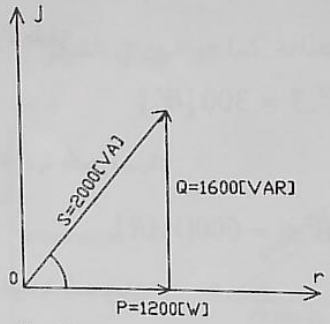
$$\underline{S} = 1200 = +J1600[VA]$$

ومنه:

$$P = \mathrm{Re}[\underline{S}] = 1200\ [W]$$

$$Q = im[\underline{S}] = 1600\ [VAR]$$

ويبين الشكل (٦-٦) مثلث الاستطاعة المطلوب.

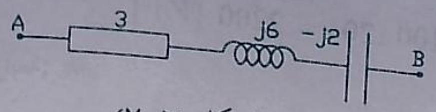


الشكل (٦ ـــ ٦) مثلث الاستطاعة

مسالة (٦ ـــ ٣):

نطبق على الدارة المبينة في الشكل (٦-٧) التوتر $\underline{U} = 50.e^{-J90}[V]$

المطلوب رسم مثلث الاستطاعة وتحديد قيم استطاعاته. [9]



الشكل (٦-٧)

الحل:

نحسب التيار المار في الدارة:

$$\underline{Z} = (3+J6-J2) = (3+J4) = 5.e^{J53,1}[\Omega]$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{50e^{-j90o}}{5e^{j53.1^\circ}} = 10e^{j143.1^\circ}[A]$$

١ ــ الاستطاعة الفعلية:

$$P = I^2.R = 10^2.3 = 300\,[W]$$

٢ ــ الاستطاعة الردية التحريضية:

$$Q_L = I^2.X_L = 10^2.6 = 600[VAR]$$

٣ ــ الاستطاعة الردية السعوية:

$$Q_C = I^2.X_C = 10^2.(-2) = -200[VAR]$$

٤ــ الاستطاعة الظاهرية:

$$S = I^2.Z = 10^2.5 = 500[VA]$$

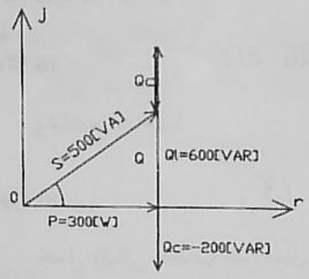
ويبين الشكل (٦-٨) مثلث الاستطاعة موضحاً عليه الاستطاعة التخيلية التحريضية الموجبة والاستطاعة التخيلية السعوية السالبة. إلا أنه يمكننا تحديد مثلث الاستطاعة مباشرة وبدون الرجوع إلى الاستطاعتين التخيليتين الإفراديتين، كما ورد في الطريقة التالية:

$$\underline{S} = \underline{U}.\underline{I}^{*} = 50 .e^{-J90} .10 .e^{J143,1}$$
$$= 500 .e^{J53,1} = 300 + J400 [VA]$$

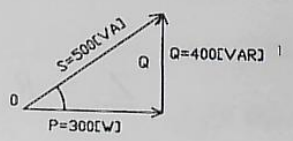
ومنه:

$$P = \text{Re}[\underline{U}.\underline{I}^{*}] = 300 [W]$$
$$Q = \text{Im}[\underline{U}.\underline{I}^{*}] = 400 [VAR]$$

ونرسم مثلث الاستطاعة كما هو مبين في الشكل (٦-٩).



الشكل (٦-٨)



الشكل (٦-٩)

٦ ــ ٣: نظرية نقل أكبر استطاعة ممكنة:[11]

يكلف توليد القدرة الكهربائية جهوداً مادية وبشرية، لذلك نسعى إلى نقل أكبر قدر ممكن من الاستطاعة التي يولدها المولد إلى الحمل

والاســـتطاعة للاستفادة منها وتحويلها إلى شكل آخر من أشكال القدرة، التي لا نستطيع نقلها من المولد يتحول قسم منها ضمن المولد إلى حـــرارة ويتأرجح القسم الآخر بين المولد والحمل باعتبارها استطاعة ردية لا يمكن الاستفادة منها، وقد تضر بالتجهيزات الكهربائية في بعض الحالات.

لذلك نعالج فيما يلي الطرق التي تمكننا من نقل أكبر قدر ممكن من الاستطاعة التي يولدها المولد إلى الحمل، وسنعالج في المقطع التالي طـــرق إزالة الاستطاعة الردية إزالة تامة أو جزئية، وهذا ما يسمى «تحسين عامل الاستطاعة».

نحمل في الحالات العامة مولداً (ثنائي أقطاب فعّال) توتر اللاحمل عند مأخذيه B , A هو

$$e(t) = E_m . \sin \omega t \qquad (6,18)$$

وممانعته الداخلية

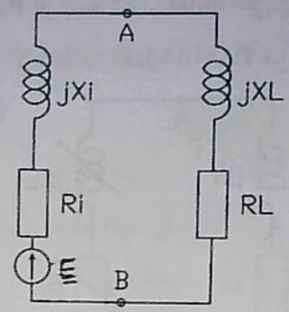
$$\underline{Z}_i = R_i + jX_i \qquad (6,19)$$

بحمل (ثنائي أقطاب غير فعال) ممانعته

$$\underline{Z}_L = R_L + jX_L \qquad (6,20)$$

كما في الشكل (٦-١٠) ، ونحدد فيما يلي قيمـــة $\underline{Z}_L$ بحيـــث يستطيع الحمل أخذ أكبر استطاعة فعلية ممكنة من مأخذي المولد، نظـــراً

لأننا لا نستطيع التدخل ضمن المولد والتحكم بممانعته الداخلية $\underline{Z}_i$ فهي معطاة ثابتة.



الشكل (٦ — ١٠)

ونذكر هنا بأن الاستطاعة الفعلية التي يأخذها الحمل (المستهلك) من المولد هي الاستطاعة التي تتحول في المركبة الفعلية من ممانعة الحمل (في المقاومة الأومية R_L) إلى شكل آخر من أشكال القدرة.

نناقش فيما يلي الحالات العملية الثلاث التالية:

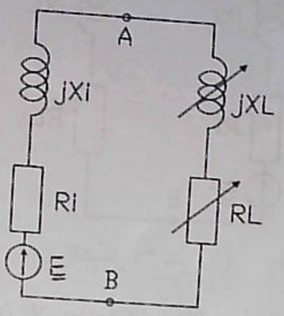
الحالة الأولى:

وتسمى توافق الاستطاعة العقدي، الحمل عبارة عن ممانعة تكون مقاومته ومفاعلته الردية قابلتين للتغيير كما في الشكل (٦-١١).

نحسب قيمتي R_L, X_L اللتين تمكنان الحمل من أخذ أكبر استطاعة فعلية من المولد.

$$P = I^2 R = \frac{U_R^{\;2}}{R} = U_R . I \qquad (6,21)$$

قيمة التيار المار في R_L أو قيمة التوتر الهابط على R_L والناجم عن مـــرور التيار، فنحصل على الاستطاعة الفعلية المأخوذة من المولد.



الشكل (٦ ــ ١١)

نعوض في معادلة حساب الاستطاعة (المعادلة (6,6)).

التيار المار في R_L هو:

$$I = \frac{E}{Z_t} = \frac{E}{(R_i + R_l) + j(X_i + X_l)} \qquad (6,22)$$

والقيمة الفعالة لهذا التيار هي:

$$I = \frac{E}{Z_t} = \frac{E}{\sqrt{(R_i + R_l)^2 + (X_i + X_l)^2}} \qquad (6,23)$$

بذلك تكون الاستطاعة الفعلية في المقاومة R_L:

$$P_l = I^2 R_l = E^2 \frac{R_l}{(R_i + R_l)^2 + (X_i + X_l)^2} \qquad (6,24)$$

وحتى تكون الاستطاعة المأخوذة من المولد فعلية فقط وجــب أن يكون الجزء الردي في العلاقة (6,24) مساوياً الصفر، أي:

$$X_l + X_i = 0$$
$$X_i = -X_l \qquad (6,25)$$

وهذا يكافئ وجود الدارة في حالة طنين تسلسلي، ينجم بالوقت نفسه عن صغر المخرج كبر الاستطاعة الفعلية P_L.

بذلك تصبح العلاقة (6,24) بالشكل التالي:

$$P_l = E^2 \frac{R_l}{(R_i + R_l)^2} \qquad (6,26)$$

لحساب قيمة R_L التي تمكن الحمل من أخذ أكبر استطاعة فعليــة ممكنة نشتق P_L بالنسبة لـ R_L ونحسب النهاية العظمى أي نساوي المــشتق بالصفر.

$$\frac{dp_l}{dR_l} = E^2 \frac{(R_i + R_l)^2 - 2(R_i + R_l)R_l}{(R_i + R_l)^4}$$
$$= E^2 \frac{(R_i + R_l) - 2R_l}{(R_i + R_l)} = 0 \qquad (6,27)$$

وتتحقق العلاقة الأخيرة عندما تكون:

$$R_l = R_i$$
$$R_L = \infty \qquad (6,28)$$

بتعويض $R_L=R_l$ في المعادلة (6,26) نحصل على أكــبر اســتطاعة فعلية يمكن أن يأخذها الحمل من المولد.

$$P_{l,\max} = \frac{E^2}{4R_i} = \frac{E^2}{4R_l} \qquad (6,29)$$

منه يتضح أنه إذا كانت مقاومتا الحمل الفعلية والرديــة قــابلتين للتغير، فإننا نستطيع الحصول على أكبر استطاعة فعلية ممكنة من المولــد عندما تكون ممانعة الحمل $\underline{Z}_l$ مساوية للقيمة العقدية المرافقة لممانعة المولد الداخلية $\underline{Z}_i$.

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}_i^* \Rightarrow$$
$$R_l - jX_l = R_i + jX_i \qquad (6,30)$$

أما الاستطاعة التي يولدها المولد فهي:

$$P_G = \frac{E^2}{R_i + R_l} = \frac{E^2}{2R_i} = \frac{E^2}{2R_l} \qquad (6,31)$$

وتساوي ضعفي الاستطاعة التي يأخذها المستهلك.

مردود الدارة:

مردود عمل الدارة هو نسبة الاستطاعة التي يأخذها المستهلك من المولد إلى الاستطاعة الكلية التي يولدها المولد، منه يتبين أن أكبر مردود يمكن أن تعمل به الدارة في هذه الحالة هو $\eta=50\%$، نظراً لأن نصف الاستطاعة المولدة تتحول في المقاومة الداخلية للمولد R_i إلى حرارة.

ويمكن القبول بهذه الطريقة في تقنية التيار الضعيف حيث تكون الاستطاعات المولدة صغيرة، ولا يمكن القبول بها في تقنيات التيار العالي حيث تكون الاستطاعات المولدة عادة كبيرة.

وإذا أريد جعل المردود أكبر من ذلك كما هي الحال في منشآت التيار العالي وجب أن تكون المقاومة الداخلية للمولد أصغر بكثير من مقاومة الحمل، أي $R_L >> R_i$ ويعني ذلك الاقتراب من الحل الثاني لحساب النهاية العظمى وهو:

$$R_l \to \infty$$

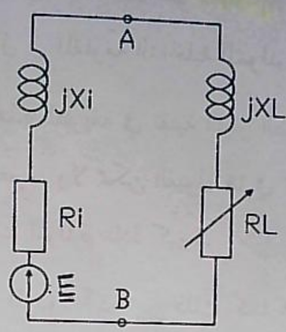
وكأن المولد (ثنائي الأقطاب الفعال) غير محمل.

الحالة الثانية:

الحمل عبارة عن ممانعة فقط مقاومتها قابلة للتغيير كما في الشكل (٦-١٢).

لا يمكن في هذه الحالة تحقيق توافق الاستطاعة العقدي، أي هناك استطاعة تخيلية تتأرجح بين الحمل والمولد.

نحسب قيمة R_L التي تمكن الحمل من أخذ أكبر استطاعة فعلية من المولد بموجب العلاقة (6,24) ونشتق P_L بالنسبة ل R_L ونساوي المـــشتق بالصفر.



الشكل (٦-١٢)

$$\frac{dp_l}{dR_l} = E^2 \frac{(R_i + R_l)^2 + (X_i + X_l)^2 - 2(R_i + R_l).R_l}{[(R_i + R_l)^2 + (X_i + X_l)^2]^2} \qquad (6,32)$$

بعد فك أقواس الصورة والاختصار ومساواتها بالصفر يكون:

$$R_i^{\,2} - R_l^{\,2} + X_i^{\,2} + X_l^{\,2} + 2X_iX_l = 0 \qquad (6,33)$$

$$R_l^{\,2} = R_i^{\,2} + (X_i + X_i)^2 \Rightarrow$$

$$R_l = \sqrt{R_i^{\,2} + (X_i + X_l)^2} \qquad (6,34)$$

الحالة الثالثة:

الحمل عبارة عن مقاومة أومية فقط R_L قابلة للتغير، كما في الشكل (٦-١٣)

نحسب قيمة R_L التي تمكن الحمل من أخذ أكبر استطاعة فعلية من المولد.

بعد تعويض $X_L = 0$ في المعادلة (6,24) تصبح بالشكل التالي:

$$P_l = I^2 R_l = E^2 \frac{R_l}{(R_i + R_l) + X_i^2} \qquad (6,35)$$

نشتق P_L بالنسبة لـ R_L وتساوي المشتق بالصفر.

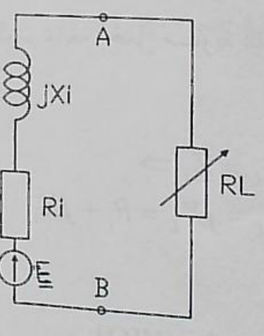
$$\frac{dp_l}{dR_l} = E^2 \frac{(R_i + R_l)^2 + X_i^2 - 2(R_i + R_l)R_l}{\left[(R_i + R_l)^2 + X_i^2\right]^2} \qquad (6,36)$$

بعد فك أقواس الصورة والاختصار ومساواتها الصفر يكون:

$$R_i^2 + X_i^2 - 2R_l^2 = 0 \qquad (6,37)$$

$$R_l^2 = R_i^2 + X_i^2 \Rightarrow$$

$$R_l = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = Z_i \qquad (6,38)$$



الشكل (٦ ــ ١٣)

مسالة (٦ ــ ٤):

نحمل مولداً توتره $U(t) = 120\sqrt{2}V \sin \omega t$ وممانعته الداخلية $\underline{Z}_i = 3 + j4[\Omega]$ بحمل ممانعته $\underline{Z}_L$ كمـا في الـشكل (٦ــــ ١٤)، المطلوب: تحديد $\underline{Z}_L$ بحيث يمكن نقل أكبر استطاعة ممكنة من المولــد إلى الحمل، ثم حساب قيمة هذه الاستطاعة وذلك للحالات الثلاث التالية:

١ ــ R_L و X_L قابلتان للتغير.

٢ ــ R_L قابلة للتغيير فقط و X_L ثابتة وتساوي $12[\Omega]$.

٣ ــ R_L قابلة للتغيير و X_L تساوي الصفر. [11]

الحل:

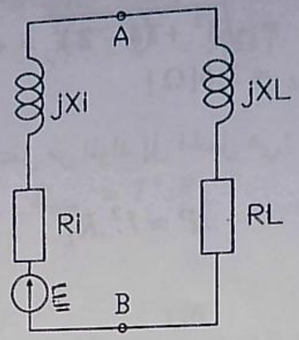
الحالة الأولى:

يأخذ الحمل أكبر استطاعة فعلية ممكنـــة مـــن المولـــد في حالـــة التوافـــق، أي عندما تكون ممانعة الحمل مساوية القيمة العقدية المرافقـــة لممانعة المولد الداخلية.

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_i^* \Rightarrow$$
$$R_L - jX_L = R_i + jX_{ii}$$

ومنه:

$$\underline{Z}_L = 3 - j4[\Omega]$$



الشكل (٦-١٤)

الاستطاعة الفعلية التي تنتقل من المولد إلى الحمل هي:

$$P_{\max} = I^2.R_L$$

حيث:

$$I = \frac{U}{(R_i + R_l) + j(X_i + X_p)} = \frac{120}{[(3+3) + j(4-4)]}[A]$$

$$I = \frac{120}{6} = 20\ [A]$$

ومنه:

$$P_{\max} = 20^2.3 = 1200[W]$$

الحالة الثانية:

نحسب قيمة R_L :

$$R_L = \sqrt{R_i^{\,2} + (X_i + X_l)^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13}$$
$$R_L = 3{,}6[\Omega]$$

الاستطاعة الفعلية التي تنتقل من المولد إلى الحمل هي:

$$P = I^2 . R_L$$

حيث:

$$I = \frac{U}{(R_i + R_l) + j(X_i + X_l)}$$
$$= \frac{120}{6{,}6 + j2}$$
$$= \frac{120}{[(3+3{,}6)^2 + (4-2)^2]}$$
$$= \frac{120}{\sqrt{6{,}6^2 + 4}}$$
$$= 17{,}4[A]$$

ومنه:

$$P_{max} = 17{,}4^2 . 3{,}6$$
$$= 1090 \ [W]$$

الحالة الثالثة:

نحسب قيمة R_L :

$$R_l = \sqrt{R_i^{\,2} + X_i^{\,2}}$$
$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5[\Omega]$$

الاستطاعة الفعلية:

$$P_{\max} = I^2 . R_L$$

حيث:

$$I = \frac{U}{(R_i + R_l) + jX_i} = \frac{120}{[(3+5)+j4]} = \frac{120}{(8+j4)}$$
$$= \frac{120}{\sqrt{64+16}} = 13{,}41[A]$$

ومنه:

$$P_{\max} = 13{,}41^2 .5 = 900[W]$$

٦ ــ ٤ : تحسين عامل الاستطاعة: [9]

نفترض أنه لدينا مولد مقاومته الداخلية قابلة للإهمال وتوتر اللاحمل عند مأخذيه U وتردده f، في الحياة العملية هنالك ثلاث إمكانات لربط المولد بالمستهلك.

١- المستهلك مقاومة أومية بحتة:

يقدم المولد إلى المستهلك استطاعة فعلية فقط تتحول ضمنه إلى شكل آخر من أشكال القدرة، زاوية طور المستهلك مساوية الصفر،

ويمكن القول أن عامل استطاعة المستهلك $\cos\varphi = 1$، شكل (٦ – ١٥ – أ).

٢– المستهلك ممانعة عقدية تتألف من مركبة فعلية ومركبة ردية تحريضية:

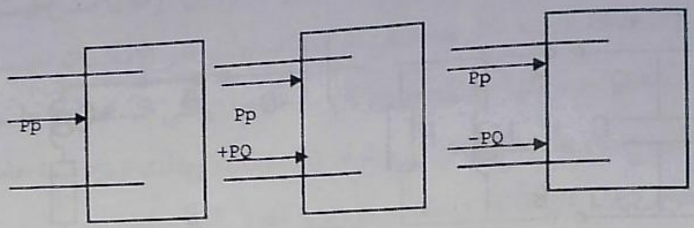
يقدم المولد إلى المستهلك استطاعة يحول المستهلك جزءاً منها إلى شكل آخر من أشكال القدرة باعتبارها استطاعة فعلية p ويتأرجح الجزء الآخر بين المولد والمستهلك باعتبارها استطاعة ردية Q+، زاوية طور المستهلك موجبة وعامل استطاعته $\cos\varphi < 1$، شكل (٦– ١٥ – ب).

٣– المستهلك ممانعة عقدية تتألف من مركبة فعلية ومركبة ردية سعوية:

يقدم المولد إلى المستهلك استطاعة يحول المستهلك جزءاً منها إلى شكل آخر من أشكال القدرة باعتبارها استطاعة فعلية P ويتأرجح الجزء الآخر بين المولد والمستهلك باعتبارها استطاعة ردية سالبة Q- ، زاوية طور المستهلك سالبة وعامل استطاعته $\cos\varphi < 1$، شكل (٦– ١٥ – جـ).

وكما ذكر في المقطع (٦– ٣) نتكلف على توليد الاستطاعة الردية، ولا نستطيع الاستفادة منها، وبدلاً من أن تتحول إلى شكل آخر من أشكال القدرة فإنها تتأرجح بين المولد والمستهلك وقد تسبب ضرراً للدارة الكهربائية، لذلك نسعى في الحياة العملية دائماً إلى منع تأرجح

الاستطاعة التخيلية بين المولد والمستهلك بوصل عنـصر توصـيل علـى التسلسل أو على التفرع مع المستهلك ممانعته معاكسة للمركبة الرديـة في ممانعة المستهلك، وهذا ما يسمى تحسين عامل الاستطاعة.



الشكل (٦ ــ ١٥)

يبين الشكل (٦ – ١٦) إمكانيات توصيل عنـصر ردي علـى التسلسل أو على التفرع مع مستهلك ومركبته الردية سعوية أو تحريضية.

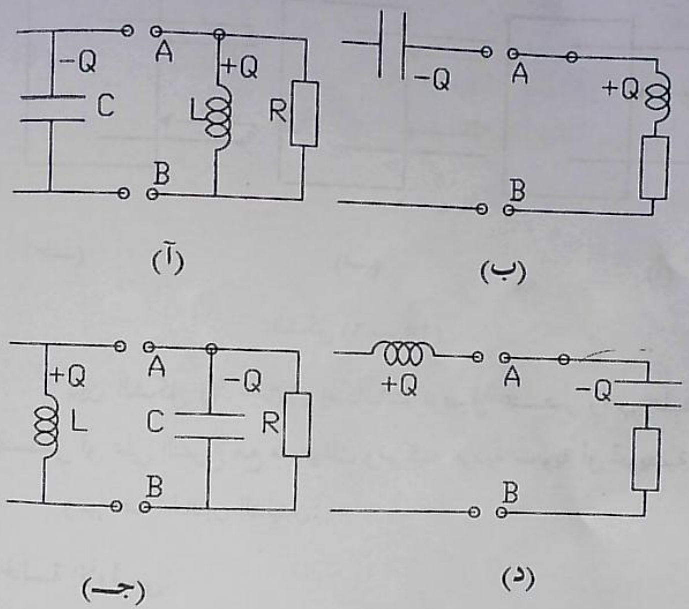
ونميز هنا الحالتين التاليتين:

الحالـة الأولـى:

تحسين عامـل الاستطاعة بإزالة الاستطاعة الردية إزالة تامـة.

فـي هذه الحالـة نمنع تأرجـح الاستطاعـة الرديـة بيـن المولـد والمستهلك كليـا، وتتأرجـح الاستطاعة الردية بيـن عنصري التوصيل الرديين الموصوليـن علـى التفرع خارج المولـد، ولا يلاحظ المولد ذلك التأرجـح قطعيـاً، ويصبح حمـل المولـد حقيقيـاً،

وتكافــئ هذه الحالة حالة الطنين التسلسلي، شــكل (٦ -١٦- ب و د) أو حالــة الطنين التفرعــي، شــكل (٦-١٦- آ و ج). وبــذلك يصبح عامل الاستطاعة $\cos\varphi = 1$ وتصبح زاوية الطور $\varphi = 0$.



الشكل (٦ ــ ١٦)

وهذا يكافئ فــي مثلث الاستطاعة جعل شــعاع الاســتطاعة الظاهرية S منطبقاً على المحور الحقيقي (على الشعاع P) بحيــث تــصبح الاستطاعة الردية $Q = 0$ و $\varphi = 0$.

الحالة الثانية:

تحسين عامل الاستطاعة بإزالة الاستطاعة الردية إزالة جزئية.

في حال تعذر تحقيق الحالة الأولى نسعى إلى الإقلال من قيمة الاستطاعة الردية المتأرجحة بين المولد والمستهلك قدر الإمكان حيث يتأرجح جزء منها بين العنصرين الردين الموصلين على التسلسل أو على التفرع ، ويتأرجح الباقي بين المولد والمستهلك، وبذلك تزداد قيمة عامل الاستطاعة $\cos\varphi$ وتصغر قيمة زاوية الطور φ.

وهذا يكافئ في مثلث الاستطاعة جعل شعاع الاستطاعة الظاهرية S يقترب من المحور الأفقي (من الشعاع P) وجعل الزاوية φ تقترب من الصفر.

في التطبيقات المنزلية والصناعية يكون الحمل عادةً حملاً تحريضياً، لذلك نكتفي فيما يلي بمناقشة إمكانية واحدة من الإمكانيتين السابقتين المبينتين في الشكل (٦- ١٦) وهي أن زاوية طور المستهلك موجبة (التوتر يسبق التيار) والمطلوب وصل عنصر ردي سعوي بين المولد والمستهلك على التسلسل أو على التفرع لتحسين عامل الاستطاعة.

٦-٤-١ : تحسين عامل الاستطاعة بالإزالة التامة للاستطاعة الردية:

بمعرفة قيمة المحارضة L والمقاومة R وتردد التشغيل f للمستهلك.

نستطيع حساب السعة الواجب وصلها على التسلسل C_s أو على التفرع

C_p اللازمة لإزالة الاستطاعة التخيلية إزالة تامة بموجب المعادلة :

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (6,39)$$

هذه العلاقة صالحة لدارتي الطنين التسلسلية و التفرعية.

إلا أننا نود هنا حساب:

١ ــ قيمة عنصر التوصيل لإزالة الاستطاعة الردية C_s أو C_p.

٢- الاستطاعة الفعلية التي يأخذها المستهلك بعد إزالة الاستطاعة الردية P'.

٣- التوتر الهابط على المستهلك بعد إزالة الاستطاعة التخيلية U_p.

وذلك بعلاقة مواصفات الأجهزة الكهربائية المنزلية والصناعية التي تدون عادة على لوحة خاصة تثبت على الجهاز وهي:

١ ــ توتر التشغيل U.

٢ ــ تردد التشغيل f.

٣ ــ عامل الاستطاعة $\cos \varphi$.

٤ ــ الاستطاعة التي يأخذها المستهلك (قبل تحسين عامل الاستطاعة) P.

مع افتراض أن المقاومة الداخلية للمولد صغيرة وقابلة للإهمال، ويوضح الشكل (٦ – ١٧) هذه الحالة.

آ – وصل عنصر التوصيل على التفرع مع المستهلك :

١ــ يجب اختيار قيمة C_p المبينة في الشكل (٦-١٧-آ) بحيث تتحقق العلاقة:

$$Q = U^2 . \omega . C_P \quad (6,40)$$

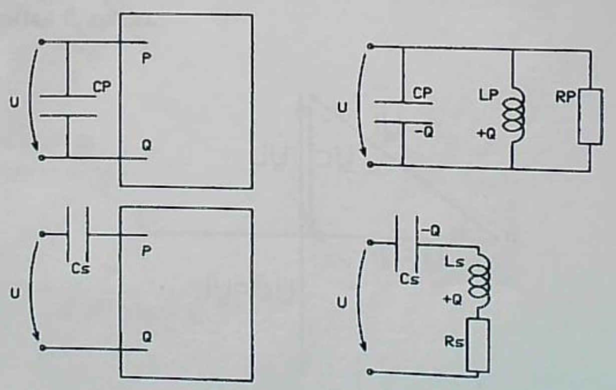
بالتعويض في العلاقة:

$$Q = P . \tan \varphi \quad (6,41)$$

$$C_P = \frac{P}{U^2 . \omega} \tan \varphi \quad (6,42)$$

٢ ــ لا تتغير قيمة الاستطاعة الفعلية التي يأخذها المستهلك من المولد عند توصيل C_p على التفرع مع المستهلك.

$$P' = P \quad (6,43)$$



الشكل (٦ ــ ١٧)

٣ ـــ توتر المستهلك هو توتر المولد نفسه قبل وصل C_p علـــى التفـــرع بعده:

$$U_l = U \tag{6,44}$$

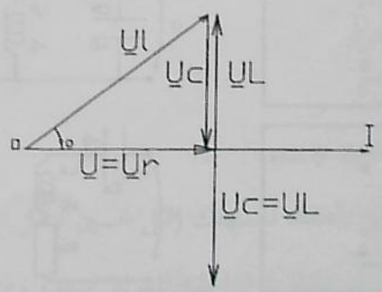
ب – وصل عنصر توصيل على التسلسل مع المستهلك :

١ ـــ تحديد قيمة C_s المبينة في الشكل(٦-١٧- ب):

$$Q' = U_c . I = U_l . I \Rightarrow$$
$$U_c = U_l \tag{6,45}$$

حيث:

I: تيار المولد (أيضاً تيار المستهلك) في حالة إزالة الاستطاعة الردية، ومن المخطط الشعاعي المبين في الشكل (٦- ١٨) للـــدارة في حالـــة إزالـــة الاستطاعة الردية نجد:



الشكل (٦ -١٨)

$$U_l = U_R.\tan\varphi = U.\tan\varphi \quad (6,46)$$

$$Q' = P'.\tan\varphi = U_l^2.\omega.c \quad (6,47)$$

ومنه:

$$P'.\tan\varphi = (U_R.\tan\varphi)^2.\omega.c_s \quad (6,48)$$

$$C_s = \frac{P`}{U^2\omega\ \tan\ \varphi} \quad (6,49)$$

وتوتر المستهلك U_l أكبر من توتر المولـــد U في حالـــة إزالـــة الاستطاعة الردية (بدون إزالة الاستطاعة الردية توتر المستهلك هو تـــوتر المولد) وبالتالي `Q و`P في حالة إزالة الاستطاعة الردية أكبر منها بدون إزالة الاستطاعة الردية (Q`> Q, P`> P).

$$P` = \frac{U^2}{R} \quad (6,50)$$

$$P = \frac{(U\ \cos\ \varphi)^2}{R} \quad (6,51)$$

$$\frac{P}{P`} = \cos^2\varphi \quad (6,52)$$

ومنه:

$$C_s = \frac{P}{U^2.\omega.\sin\varphi.\cos\varphi} \quad (6,53)$$

٢ ــ الاستطاعة الفعلية التي يأخذها المستهلك:

$$P` = \frac{P}{\cos^2\varphi} \quad (6,54)$$

٣ ــ التوتر الهابط على المستهلك:

$$U_l = \frac{U}{\cos \varphi} \qquad (6,55)$$

جـ ــ نسبة قيمتي العنصرين التفرعي والتسلسلي:

من حل الفقرتين (آ) و(ب) نحصل على النسبة المطلوبة:

$$\frac{C_P}{C_S} = \sin^2 \varphi \qquad (6,56)$$

وتكون قيمة C_p دائماً أصغر من قيمة C_s طالما أن زاوية طور المستهلك:

$$\varphi < \pi/2$$

٦-٤-٢ :تحسين عامل الاستطاعة بالإزالة الجزئية للاستطاعة الردية:

آ - وصل عنصر التوصيل على التفرع مع المستهلك :

لدينا مستهلك مبين في الشكل (٦-١٩-أ) استطاعته الفعلية P وتوتر تشغيله U بتردد f وعامل استطاعته $\cos \varphi$ ، المراد تحسين عامل استطاعته ليصبح $\cos \varphi'$

$$\cos\varphi' > \cos\varphi$$

بوصل مكثف على التفرع مع المستهلك.

يبين الشكل (٦- ١٩- ب) مثلث الاستطاعة قبل تحسين عامل الاستطاعة و الشكل (٦- ١٩- جـ) يبين مثلث الاستطاعة بعد التحسين، وبما أن الاستطاعة الفعلية التي يأخذها المستهلك لا تتغير نتيجة وصل المكثف على التفرع مع المستهلك كما ورد في الفقرة (آ) من الحالة الأولى، نظراً لأن التوتر على مأخذي المستهلك B,A لا يتغير نتيجة هذا التوصيل يكون التالي:

الاستطاعة الردية في التحريض قبل وصل المكثف هي:

$$Q_l = P.\tan\varphi \qquad (6,57)$$

وبعد وصل المكثف هي:

$$Q_l^{'} = P.\tan\varphi^{'} \qquad (6,58)$$

منه تكون الاستطاعة الردية في المكثف:

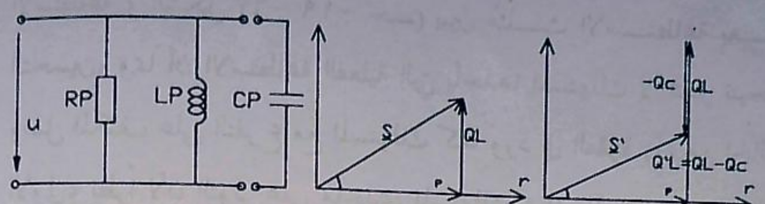
$$\begin{aligned} Q_c &= Q_l - Q_l^{'} \\ &= P.\tan\varphi - P\tan\varphi^{'} \end{aligned} \qquad (6,59)$$

نعوض قيمة الاستطاعة الردية في المكثف:

$$Q_c = U^2.\varphi.C_P$$
$$U^2.\omega.C_P = P(\tan\varphi - \tan\varphi') \qquad (6,60)$$

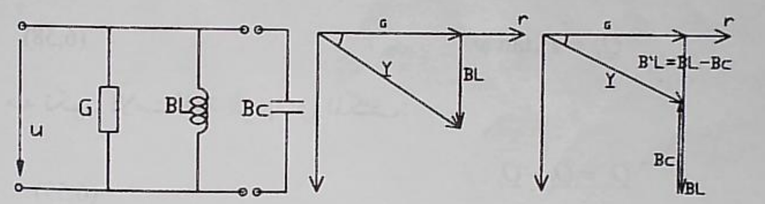
بذلك تكون قيمة السعة C_P:

$$C_P = \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi`)}{U^2\omega} \qquad (6,61)$$



الشكل (٦ ــ ١٩)

أما إذا كانت قيم f, L, R معطاة فنحسب C_p مــن المخططــين الشعاعيين المبينين في الشكل (٦ – ٢٠).



الشكل (٦– ٢٠)

السماحية التحريضية قبل وصل المكثف هي:

$$B_l = G.\tan\ \delta \qquad (6,62)$$

وبعد توصيل المكثف هي:

$$B_l^{'} = G.\tan\delta^{'} = B_l + B_c \qquad (6,63)$$

نعوض:

$$B_L = -\frac{1}{\omega.L} \text{ و } G = \frac{1}{R} \text{ و } \delta` = -\varphi \text{ و } \delta = -\varphi` \text{ و } B_C = \omega.C_P$$

$$B`_L = -\frac{1}{R}\tan\acute{\varphi} = B_L + B_C = -\frac{1}{\omega.L} + \omega.C_P \qquad (6,64)$$

بذلك تكون قيمة السعة C_P:

$$C_P = \frac{\frac{1}{\omega.L} - \frac{1}{R}\tan\acute{\varphi}}{\omega} \qquad (6,65)$$

وإذا عوضنا في المعادلة (6,65):

$$B_L = -\frac{1}{\omega.L} = G\tan\delta = -G\tan\varphi` \qquad (6,66)$$

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow G = \frac{P}{U^2} \qquad (6,67)$$

نحصل على المعادلة نفسها(6,61) :

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{G\tan\varphi - G\tan\varphi`}{\omega} \\ &= \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi`)}{U^2\omega} \end{aligned} \qquad (6,68)$$

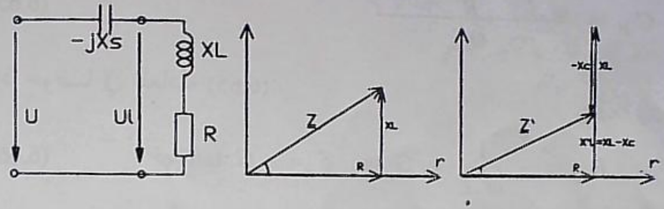
ب ــ وصل عنصر التوصيل على التسلسل مع المستهلك :

يوصل المكثف على التسلسل مع دارة المستهلك كما في الـــشكل (٦-٢١- آ) تصغر ممانعة الدارة الكلية وتكبر قيمة التيار المار في الدارة، بذلك تكبر قيـــم جميـــع التوترات والاستطاعات في الدارة (انظر الفقرة

«ب» من الحالة الأولى) ونتوصـــل إلى حساب C_s بـــسرعة ووضـــوح أفضل إذا انطلقنا من المخططين الشعاعيين للممانعة بعد حـــساب R ،X_L الشكل (٦ - ٢١ - ب و جـ) حيث:

$$P=\frac{U^2}{R}\Rightarrow R=\frac{U^2}{P} \qquad (6,69)$$

$$X_L = R\tan\varphi \qquad (6,70)$$



الشكل (٦ ــ ٢١)

الممانعة التحريضية للدارة بعد وصل المكثف هي:

$$X`_L = R\tan\varphi` = X_L + X_C = R\tan\varphi - \frac{1}{\omega . C_S} \qquad (6,71)$$

$$\frac{1}{\omega . C_S} = R\tan\varphi - R\tan\varphi` \qquad (6,72)$$

وبذلك تكون قيمة السعة C_s:

$$C_s = \frac{1}{\omega . R(\tan\varphi - \tan\varphi`)} \qquad (6,73)$$

بتعويض $R=\frac{U^2}{P}$ تصبح المعادلة على الشكل التالي:

$$C_S = \frac{P}{U^2\omega.(\tan\varphi - \tan\varphi`)} \qquad (6,74)$$

مسالة (٦ ــ ٥):

لدينا مولد مقاومته الداخلية قابلة للإهمال وتوتر اللاحمل عند مأخذيه، 220[V] وتردده 50[HZ] نحمل المولد بمستهلك عامل استطاعته $\cos\varphi = 0.9$ متأخر فيأخذ استطاعة فعلية 1[KW]. المطلوب تحسين عامل الاستطاعة بإزالة الاستطاعة الردية إزالة تامة.

١ ــ حدد نوع عنصر التوصيل الواجب وصله مع المستهلك مرة على التفرع وأخرى على التسلسل ثم أحسب قيمته.

٢ ــ أحسب الاستطاعة الفعلية التي يأخذها المستهلك والتوتر الهابط على مأخذي المستهلك بعد تحسين عامل الاستطاعة. [9]

الحل:

آ ــ التوصيل على التفرع:

١ ــ يجب وصل مكثف على التفرع مع المستهلك سعته C_p نحدد قيمتها من المعادلة (6,42):

$$C_p = \frac{P}{U^2\omega}\tan\varphi = \frac{1.10^3}{(220)^2 2\pi 50}\tan 25.84° \approx 32[PF]$$

٢ ــ يأخذ المستهلك الاستطاعة الفعلية نفسها:

$$P^{`} = P = 1[KW]$$

يهبط التوتر نفسه على مأخذي المستهلك:

$$U^{`} = U = 220\,[V]$$

ب ــ التوصيل على التسلسل:

$$C_S = \frac{P}{U^2.\omega.\sin\varphi.\cos\varphi}$$

$$= \frac{1.10^3}{(220)^2\,2\pi 50\sin 25.84°.\cos 25.84°}$$

$$= 169\,[\mu F]$$

أو من المعادلة (6,56)

$$C_S = \frac{C_P}{\sin^2\varphi} = \frac{32.10^{-12}}{0.436^2}$$

$$= 169\,[\mu F]$$

٢ ــ الاستطاعة الفعلية التي يأخذها المستهلك:

$$P` = \frac{P}{\cos^2\varphi} = \frac{1.10^3}{0.9^2}$$

$$= 1.234[KW]$$

التوتر الهابط على مأخذي المستهلك:

$$U_l = \frac{U}{\cos\varphi} = \frac{220}{\cos 25.84°}$$

$$= \frac{220}{0.9} = 245[V]$$

مسالة (٦ ــ ٦):

لـــدينا مـــستهلك ممانعتـــه $\underline{Z}=10.e^{j30}[\Omega]$ وتـــردد تـــشغيله $f=50[HZ]$. المطلوب تحسين عامل استطاعته ليصبح cosφ=0.9 بوصـــل مكثف على التفرع مع مأخذيه، أحسب سعة المكثف. [9]

الحل:

سماحية المأخذين العقدية هي:

$$\underline{Y}=\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{1}{10}e^{-j30}$$
$$=0.1(0.866-j0.5)[S]$$

عامل الاستطاعة المطلوب cosφ=0.9 بالتالي:

$$\varphi=25,84^{o}\Rightarrow$$
$$tg\,\varphi=0,484\Rightarrow tg\,\delta=-0,484$$

من المخطط الشعاع المبين في الشكل (٦ - ٢٠):

$$\tan\delta=-0,484\Rightarrow$$
$$\frac{B_L+B_C}{G}=\frac{-50+\omega.C_P}{86.6}=-0,484$$

بالتالي قيمة السعة C_P هي:

$$\omega.C_P=(-0,484.86,6+50)[mS]$$
$$C_P=\frac{8.1.10^{-3}}{\omega}=\frac{8.1.10^{-3}}{314}$$
$$=25.79[\mu F]$$

مسالة (٦ ــ ٧):

نطبق على مستهلك تحريضي التوتر 220[V] فيسري في المآخـذين التيار 1,1[A] عامل الاستطاعة 0,5 وتردد التـشغيل 50[HZ] المطلـوب تحسين عامل الاستطاعة بوصل مكثف على التسلسل مع المستهلك ليصبح 0,9 أحسب:

١ ــ سعة المكثف.

٢ ــ الاستطاعات الفعلية والردية والظاهرية قبل التحسين وبعده. [9]

الحل:

١ ــ سعة المكثف C_S:

عامل الاستطاعة

$$\cos \varphi = 0,5 \Rightarrow \varphi = 60^{o}$$
$$\sin \varphi = 0,866$$
$$tg\,\varphi = 1,732$$

عامل الاستطاعة

$$\cos \varphi' = 0,9 \Rightarrow \varphi' = 25,84^{o}$$
$$\sin \varphi' = 0,433$$
$$tg\,\varphi' = 0,484$$

ممانعة المستهلك:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{220}{1.1} e^{j60}$$
$$= 200 \left(\cos 60 + j \sin 60\right)$$
$$= (100 + j173,2)$$
$$= R + jX_L [\Omega]$$

من المخطط الشعاعي في الشكل (٦ - ٢٢):

$$\tan \varphi` = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{173,2 - \frac{1}{\omega . C_S}}{100} = 0,484$$

$$\frac{1}{\omega . C_S} = (173.2 - 48,4)[\Omega]$$

بالتالي قيمة السعة C_S هي:

$$C_S = \frac{1}{314 . 124,8} = 25,5[\mu F]$$

٢ ــ الاستطاعات قبل التحسين وبعده:

ــ الاستطاعات قبل التحسين:

التيار المار في دارة المستهلك هو [A]1,1 ، التـالي الاسـتطاعات الفعلية والردية والظاهرية هي:

$$P = U . I . \cos \varphi = 220 . 1,1 . 0,5$$
$$= 121 [W]$$

$$Q = U . I . \sin \varphi = 220 . 1,1 . 0,866$$
$$= 209,5 [VAR]$$

$$S = U \cdot I = 220 \cdot 1{,}1$$
$$= 242 \ [VA]$$

ـــ الاستطاعات بعد التحسين:

نحسب التيار المار في دارة المستهلك:

$$I' \cdot R = U \cdot \cos \varphi = 220 \cdot 0{,}9 = 198 \ [V]$$

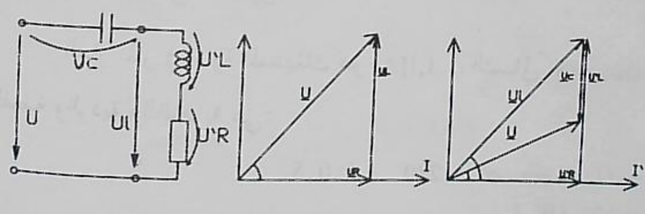
$$I' = \frac{\dot{U}_R}{R} = \frac{198}{100} = 1{,}98 \ [A]$$

بالتالي الاستطاعات الفعلية والردية والظاهرية هي:

$$P' = U \cdot I' \cos \varphi = 220 \cdot 1{,}98 \cdot 0{,}9$$
$$= 392 \ [W]$$

$$Q' = U \cdot I' \sin \varphi' = 220 \cdot 1{,}98 \cdot 0{,}435$$
$$= 189{,}5 [VAR]$$

$$S = U \cdot I' = 220 \cdot 1{,}98$$
$$= 435{,}6 [VA]$$



الشكل (٦ ـــ ٢٢)

مسالة (٦ ــ ٨):

المطلوب إعادة حل مسالة (٦- ٧) وتحسين عامــل الاســتطاعة ليصبح $\cos\varphi = 0.95$ بوصل مكثف مرة علــى التفــرع وأخــرى علــى التسلسل:

١ ــ أحسب قيمتي C_S ,C_P.

٢ ــ قارن قيمتي C_S ,C_P في هذه المسألة مع قيمتها في المــسألة (٦- ٧) وبرر ذلك. [9]

$U=220[V]$, $f = 50\ [HZ]$, $\cos\varphi = 0.9$, $P = 1[KW]$

الحل:

١ ــ وصل مكثف على التفرع:

عامل الاستطاعة:

$$\cos\varphi = 0,9 \Rightarrow \varphi = 25,84^{\circ}$$
$$\sin\varphi = 0,433$$
$$tg\,\varphi = 0,484$$

عامل الاستطاعة:

$$\cos\varphi^{'} = 0,95 \Rightarrow \varphi^{'} = 18,19^{\circ}$$
$$\sin\varphi^{'} = 0,312$$
$$tg\,\varphi^{'} = 0,328$$

من المعادلة (6,68) :

$$C_P = \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi`)}{\omega}$$
$$= \frac{1.10^3(0,484 - 0,328)}{(220)^2.314}$$
$$= 10,26[\mu F]$$

ويأخذ المستهلك نفس الاستطاعة الفعلية

$$P` = P = 1[KW]$$

ويهبط نفس التوتر على مأخذي المستهلك

$$U = U_L = 220[V]$$

٢ ــ وصل مكثف على التسلسل:

ــ حساب السعة C_S.

من المعادلة (6,74):

$$C_S = \frac{P}{U^2.\omega.(\tan\varphi - \tan\varphi`)}$$
$$= \frac{1.10^3}{(220)^2.314(0.484 - 0.328)}$$
$$= 421,8[\mu F]$$

ــ حساب $P`$, U_L:

نحسب قيمة R :

$$P = \frac{U_R^2}{R} \Rightarrow$$

$$R = \frac{U_R^2}{P} = \frac{(U \cos \varphi)^2}{P} = \frac{(198)^2}{1.10^3}$$

$$= 39{,}2[\Omega]$$

نحسب قيمة $U_R^{'}$:

$$U_R^{'} = U.\cos \varphi^{`} = 220.0{,}95$$

$$= 209[V]$$

وبالتالـــي تكون قيمة الاستطاعة الفعلية التي يأخذها المـــستهلك بعد التحسين.

$$P^{`} = \frac{U_R^{'2}}{R} = \frac{209^2}{39{,}2}$$

$$= 1114{,}3[W]$$

وتكون قيمة التوتر الهابط على مأخذي المستهلك.

$$U_L = \frac{U_R^{'}}{\cos \varphi} = \frac{209}{0{,}9}$$

$$= 231{,}5[V]$$

أي:

$$U_L > U$$

$$P^{`} > P$$

٦-٥: مسائل غير محلولة:

مسألة (٦-٥-١):

لدينا مولد القيمة الفعالة لقوته المحركة الكهربائية [V]100وتــردده 50[Hz] ومقاومته الداخلية $\underline{Z}_i = (20 + j0)[\Omega]$. نحمل المولد بمستهلك ممانعته $\underline{Z}_l = (30 + j40)[\Omega]$. المطلوب حساب:

١- التيار الذي يقدمه المولد للمستهلك.

٢- القيمة اللحظية للتيار بعلاقة الزمن.

٣-الاستطاعة الفعلية والاستطاعة الردية في المستهلك. [7]

الجواب:

$\varphi = 38{,}67^{o}$, $I = 1{,}562[A]$

$i(t) = 2{,}2\sin(\omega t - 38{,}67^{o})[A]$

$P = 73{,}2[W]$, $Q = 97{,}6[VAR]$

مسألة (٦-٥-٢):

نطبق على محرك التوتر U=220[V] فيسري في مأخذيـه التيـار I=1,15[A] ويستهلك استطاعة فعلية P=200[W] ، أحسب :

١-عامل الاستطاعة والفرق في زاوية الطور بين التوتر والتيار.

٢-المركبة الفعلية للتيار والمركبة الردية للتيار.

٣-تكاليف تشغيل المحرك لمدة ساعة إذا كانت كلفة الكيلو وات ساعي هي 1,85[SP]. [11]

الجواب:

$$\varphi = 37,8 \ , \ \cos\varphi = 0,79$$

$$37\ [S.P] \ , \ I_X = 0,7[A] \ , \ I_r = 0,91[A]$$

مسألة (٦-٥-٣):

يغذي مولد محركاً عن طريق ناقل مقاومته أومية بحتة. يستهلك المحرك استطاعة فعلية [KW] 180 عند تطبيق التوتر [V] 2400 على مأخذيه، ويسري في الناقل تيار شدته 88[A] وعامل استطاعة المحرك 0.85 ويستهلك 10% من الاستطاعة الفعلية التي يقدمها المولد للمحرك.

المطلوب حساب:

١- الاستطاعة الفعلية التي يقدمها المولد.

٢- التوتر الهابط على الناقل.

٣- عامل الاستطاعة عند مأخذي المولد.

٤- التوتر عند مأخذي المولد. [7]

الجواب :

$$U_L = 227,28[V] \;,\; P = 200[KW]$$

$$U_G = 2,595[KV],\; \cos\varphi_G = 0,873$$

مسألة (٦-٥-٤):

مكثف على شكل صفيحتين متوازيتين المسافة بينهما d=2[cm] وسطح كل صفيحة $A=(10 \times 10)cm^2$. يوجد بين الصفيحتين عازل كهربائي ثابت عازليته النسبي $(\varepsilon_r = 5)$ وعامل ضياعه $(\tan\delta = 2.10^{-2})$. نطبق على الصفيحتين المكثف توتراً متناوباً تردده 15[MHZ] وقيمته العظمى 1[KV]، المطلوب حساب:

١-قيمة شدة الحقل العظمى التي يجهد بها العازل الكهربائي.

٢-التيار وزاوية طوره للتوتر.

٣-الاستطاعة الفعلية والاستطاعة الردية والاستطاعة الظاهرية.

٤-الاستطاعة الفعلية منسوبة إلى حجم العازل الكهربائي باعتباره تابعاً لثوابت المادة، والتردد وشدة الحقل الكهربائي.

٥-كمية الحرارة المتولدة في العازل الكهربائي كل ثانية في cm^3 من العازل الكهربائي (1 WS=0,239 cal.) [11]

الجواب:

$\varphi = 89^\circ \quad I = 1,47[A] \quad , E_{max} = 0.5[KV/cm]$

$S = 1,04[KVA] \quad Q = 1,04[KVAR] \quad P = 20,8[W]$

$0,0025[cal/cm^3.S] \quad , \quad P/V = 0,105[W/cm^3]$

مسألة (٦-٥-٥) :

الاستطاعة الظاهرية عند مأخذي ثنائي أقطاب هي $S = 3500[VA]$ والقيمة الفعالة للتيار المستجر $I = 1,8[A]$ وعامل الاستطاعة $\cos\varphi = 0,76$ متأخر .المطلوب وضع دارة مكافئة تسلسلية ثم تفرعيه.

الجواب:

$$R_s = 8,2[\Omega], \quad X_{Ls} = 7[\Omega]$$
$$R_p = 14[\Omega], \quad X_{Lp} = 16,6[\Omega]$$

مسألة (٦-٥-٦) :

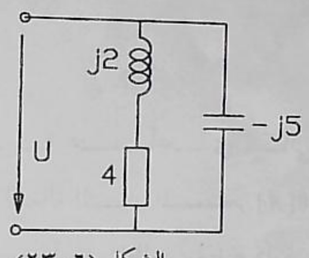
تختزن السعة C في الدارة المبينة في الشكل (٦-٢٣) استطاعة ردية $Q = 8000\ [VAR]$، المطلوب حساب :

١-الاستطاعة الفعلية التي تستهلكها الدارة.

٢-الاستطاعة الردية التي يختزنها التحريض.

٣-عامل الاستطاعة عند مأخذي الدارة.

٤- المطلوب تحديد مثلث الاستطاعة .[9]



الشكل (٦-٢٣)

الجواب :

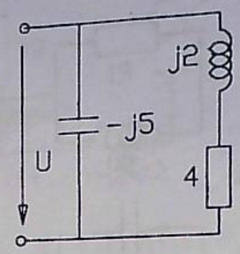
$$\cos\varphi = 0{,}894 \;,\; Q_L = 4[KVAR] \;\;,\; P = 8[KW]$$

مسألة (٦-٥-٧) :

تستهلك الدارة المبينة في الشكل (٦-٢٤) استطاعة فعلية قدرها $P = 8000\ [W]$. المطلوب حساب :

١-الاستطاعة الردية وعامل الاستطاعة .

٢- تحديد مثلث الاستطاعة. [9]



الشكل (٦-٢٤)

الجواب

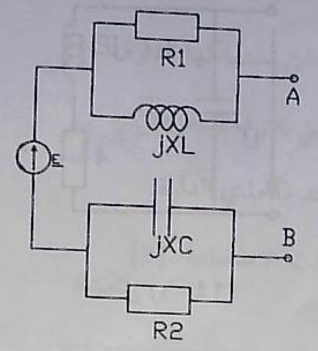
$$\cos\varphi = 0{,}894 \quad , \quad Q = 4[KVAR]$$

مسألة (٦-٥-٨):

نحمّل ثنائي الأقطاب الفعال المبين في الشكل (٦- ٢٥) بحمل $\underline{Z}_p = R_p + jX_p$ فيه كل من R_p و X_p قابلة للتغيير.

أحسب قيمتي R_p و X_p بحيث تنتقل أكبر استطاعة فعلية ممكنة من ثنائي القطب الفعال إلى الحمل ثم أحسب قيمة هذه الاستطاعة. مع العلم أن:[11]

$$e(t) = 155 \ .\sin \ \omega t \ [V]$$
$$R_1 = 10\,[\Omega], \ R_2 = 20\,[\Omega]$$
$$X_L = 20\,[\Omega], \ X_C = 10\,[\Omega]$$



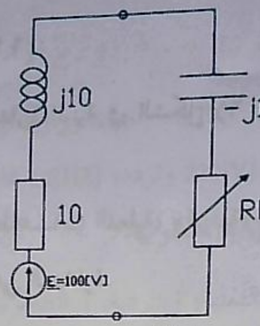
الشكل (٦-٢٥٠)

الجواب:

$R_L = 12[\Omega], X_L = 4[\Omega]$
$P_{\max} = 250[W]$

مسألة (٦-٥-٩):

لدينا الدارة المبينة في الشكل (٦-٢٦)، أحسب قيمة R_L بحيث تنتقل أكبر استطاعة فعلية ممكنة من المولد إلى الحمل، ثم أحسب قيمة هذه الاستطاعة. [11]



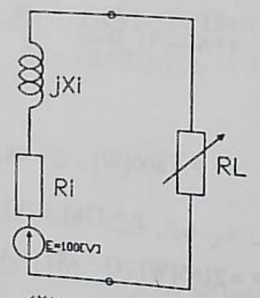
الشكل (٦ ــ ٢٦)

الجواب: $R_L = 11{,}17[\Omega]\ ,\ P_{max} = 236[W]$

مسألة (٦-٥-١٠):

لدينا الدارة المبينة في الشكل(٦-٢٧) ، أحسب قيمة R_L بحث تنتقل أكبر استطاعة فعلية ممكنة من المولد إلى الحمل، ثم أحسب قيمة هذه الاستطاعة. مع العلم أن:

$$e(t) = 70{,}71\ .\sin\ \omega t\ [V]$$
$$\underline{Z}_L = 10 + j20\,[\Omega]$$
[11]



الشكل (٦ ــ ٢٧)

الجواب: $R_L = 22{,}4[\Omega]\ ,\ P_{max} = 38{,}5[W]$

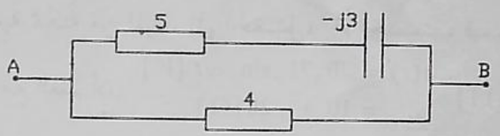
مسالة (٦ –٥–١١):

نغذي الـــدارة المبنية في الشكل (٦ – ٢٨) بتيار قيمته الفعالـــة 30[A].

١– احسب الاستطاعـــات الفعلية، والردية، والظاهريـــة التي يأخذهـــا كل فـــرع من فرعي الـــدارة.

٢– احسب الاستطاعات الفعلية، والردية، والظاهرية التي تأخذها الدارة، واحسب أيضاً عامل الاستطاعة.

٣– ما الإجراءات الممكن اتخاذهـــا لإزالـــة الاستطاعـــة الردية؟ احسب ممانعة عنصر التوصيل .[9]



الشكل (٦ ــ ٢٨)

الجواب :

الفرع العلوي: P = 800[W] , Q = 483[VAR]

الفرع السفلي: P = 1361,6[W] , Q = 0

P = 2165[W] , Q = 483 [VAR] , S=2210 [VA]

(موجب)cos φ = 0,98

ω.L_S = 0,533 [Ω] , ω.L_P = 11,33 [Ω]

مسالة (٦ –٥–١٢):

مستهلك عامـــل استطاعته $\cos\varphi = 0{,}707$ وزاوية الطور موجبة. عنــد تطبيق توتر قيمته الفعالـــة 220[V] وتردده 50[HZ] على مأخذيه يــسرى فيهما تيار قيمته الفعالـــة 8[A] المطلوب:

١- حساب الاستطاعات الفعلية، و الردية، و الظاهرية، والتيار الفعلـــي، والتيار الردي.

٢- وضع دارة مكافئة مؤلفة من عنصري توصيل، وحساب المقاومـــة، و المفاعلة لهذه الدارة.

٣- حساب قيمة عنصر التوصيل الواجب وصـــله علـــى التفـــرع مـــع المستهلك لإزالة التيار الردي. [7]

الجواب:

$$P = 1244[W]\ ,\ Q = 1244[\ VAR]\ ,\ S = 1760[\ VA]$$
$$R_P = 3\,8{,}9[\Omega]\ ,\ X_P = 38{,}9\ [\Omega]\ ,\ C_P = 81{,}7[\mu F]$$

مسالة (٦ –٥–١٣):

لدينا ثنائي أقطاب غير فعال التوتر عند مأخذيه 220[V] وتـــردد تشغيله 50[HZ] وعامل استطاعته 0,6 واســـتطاعته الظاهريـــة 85[KVA]، بوصل سعة على التفرع مع مأخذيه تنخفض الاستطاعة الظاهرية بمقـــدار 10% المطلوب حساب: [9]

١- السعة C_P.

٢- الاستطاعات الفعلية، و الردية، وعامل الاستطاعة بعد إضافة السعة.

الجواب:

C_P=723 [µF]

P=51[KW] , Cos φ= 0,67 , Q = 57 [KVAR]

مسالة (٦ -٥-١٤):

نطبق على مستهلك سعوي التوتر [V]200 فيسري في المأخذين تيار شدته [A]1 عامل الاستطاعة 0,5 والتردد [HZ]50، المطلوب تحسين عامل الاستطاعة ليصبح 0,9 بوصل تحريض على التسلسل، أرسم المخطط الشعاعي للدارة قبل التحسين وبعده، وأحسب قيمة عنصر التوصيل الواجب إضافته والاستطاعة الفعلية و الردية والظاهرية قبل تحسين عامل الاستطاعة وبعده. [9]

الجواب:

L = 0,4[H] , P = 100[W] , P` = 324[W] , Q = 173 [VAR]

Q` = 156,9[VAR] , S = 200 [VA] , S` = 360 [VA]

مسالة (٦ -٥-١٥):

الاستطاعة الظاهرية عند مأخذي ثنائي أقطاب غير فعال [VA]500 وعامل الاستطاعة 0,6 ، المطلوب:

١- الاستطاعة الظاهرية بعد تحسين عامل الاستطاعة ليصبح 0,9.

٢- الاستطاعة الردية في المكثف. [9]

الجواب:

$$S` = 333\,[KVA\ ],\ Q_C\ =\ -25\,[KVAR\ \ ]$$

مسالة (٦ -٥-١٦):

لدينا مولد مقاومته الداخلية قابلة للإهمال وتوتر اللاحمل عند مأخذيه 240[V] وتردده 60[HZ]، نحمل المولد بمستهلك استطاعته الظاهرية 4500[VA] وبعامل استطاعته cosφ=0,75 (تحريضي)، المطلوب تحسين عامل الاستطاعة بوصل مكثف على التفرع مع المستهلك ليصبح:

١- cos φ = 0,9 تحريضي.

٢- cos φ = 0,9 سعوي.

أحسب سعة المكثف في كلتا الحالتين. [9]

الجواب:

$$C_P = 61{,}3[\mu F],\ C_P = 212\,[\mu F]$$

المصطلحات والرموز العلمية

جدول المصطلحات الأجنبية

A	
Absolute constant dielectric	ثابتة العازلية المطلقة
Active	فعال
Active Element	عنصر فعال
Active power	استطاعة فعالة
Active Voltage Source	منبع توتر حقيقي
Admittance	سماحية
Admittance Matrix	مصفوفة السماحيات
Air Gap	ثغرة هوائية
Alternating Current	تيار متناوب
Ammeter	مقياس تيار
Angle	زاوية
Angular Frequency	تردد زاوي
Apparent Power	استطاعة ظاهرية
Atom	ذرة
Atomic Structure	بنية ذرية
Attraction Force	قوة الشد
Average Value	قيمة وسطية
B	
Balanced Load	حمل متوازن

Band Width	عرض المجال
Branch	فرع
Break Down Voltage	توتر الانهيار
Bridge	جسر
C	
Capacitor	مكثف
Capacity	سعة
Cascaded Connection	الربط على التتالي
Characteristic	مميزة
Charging Of Capacitors	شحن المكثفات
Charging Current	تيار الشحن
Charging Time	زمن الشحن
Charge Carrier	حاملات الشحنة
Cartesian Form	شكل ديكارتي
Chemical Effects	الآثار الكيميائية
Circuit	دارة
Coercive Field	الحقل القاهر
Coil	ملف
Coulomb Relation	علاقة كولومب
Column	عمود
Complex	عقدي
Complex Numbers	أعداد عقدية

Condenser	مكثف
Conductance	ناقلية
Connecting Wires	أسلاك التوصيل
Connection	الربط
Connection Diagram	مخطط التوصيل
Constant	ثابت
Consumer	مستهلك
Current	تيار
Current Divider	مقسم التيار
Current Division	تقسيم التيار
Current Generator	مولد التيار
Current Source	منبع تيار
Cylindrical Capacitor	مكثف اسطواني
D	
Delta Connection	توصيل مثلثي
Delta Star Conversion	تحويل من مثلث إلى نجمة
Dependent Source	منبع غير مستقل
Diagram	مخطط
Diamagnetic Materials	مواد مغناطيسية عكسية
Dielectric Constant	ثابت العازلية
Differential Equation	معادلة تفاضلية
Direct Current	تيار مستمر

Discharging Of Capacitors	تفريغ المكثفات
Divider	مقسم
E	
Effects	الآثار
Effective	القيمة الفعلية
Efficiency	المردود
Electrical Charge	الشحنة الكهربائية
Electrical Charge Density	كثافة الشحنة الكهربائية
Electrical Conductance	الناقلية الكهربائية
Electrical Circuit	الدارة الكهربائية
Electrical Current	التيار الكهربائي
Electrical Polarization	الاستقطاب الكهربائي
Electrical Potential	الكمون الكهربائي
Electrical Resistance	المقاومة الكهربائية
Electrical Work	العمل الكهربائي
Electrical Power	الاستطاعة الكهربائية
Electrical Source	المنبع الكهربائي
Electromagnetic Induction	تحريض كهرطيسي
Electromagnetism	كهرطيسية
Electromotive Force	قوة محركة كهربائية
Electron	إلكترون
Electrostatic Field	حقل كهربائي ساكن

Electrostatic Flux	تدفق كهربائي
Electrostatic Induction	تحريض كهربائي
Electrostatic Field Intensity	شدة حقل كهربائي ساكن
Element	عنصر
Energy	قدرة
Equation	علاقة
Equivalent Circuit	دارة مكافئة
Equipotent Surfaces	سطوح متساوية الكمون
Exponential Function	علاقة أسية
Exponential Form	شكل أسي
F	
Factor	عامل
Ferromagnetic Materials	مواد مغناطيسية حديدية
Flat Capacitor	مكثف مستوي
Flux	فيض
Flux Density	كثافة الفيض
Force	قوة
Form	شكل
Four Pole	رباعي أقطاب
Free	حر
Frequency	تردد
Fringing	تهدب

G	
Generator	مولد
Geometric Locus	محل هندسي
Globular Capacitor	مكثف كروي
H	
Half	نصف
Heating Effects	الآثار الحرارية
Hybrid Matrix	مصفوفة هجينة
Hysteretic Loop	عروة التباطؤ
I	
Ideal Voltage Source	منبع توتر مثالي
Imaginary Numbers	أعداد تخيلية
Impedance	ممانعة
Impedance Matrix	مصفوفة ممانعات
Impedance Triangle	مثلث ممانعات
Independent Source	منبع مستقل
Inductance	ناقلية
Insulator	عازل
Instantaneous Power	استطاعة لحظية
Instantaneous Value	قيمة لحظية
Internal	داخلي
Internal Resistance	مقاومة داخلية

Inversion	مقلوب
J	
Joules Law	قانون جول
K	
Kirchhoffs Laws	قوانين كيرشوف
L	
Lagging	متأخر
Leakage Flux	الفيض التسربي
Leakage Inductance	المحارضة التسربية
Lighting Effects	الآثار الضوئية
Line	خط
Line Current	تيار الخط
Line Voltage	توتر الخط
Linear Circuit	دارة خطية
Linear Resistance	مقاومة خطية
Load	حمل
Loop	دورة
Loss Angle	زاوية الضياع
Loss Factor	عامل الضياع
M	
Magnetic Circuit	دارة مغناطيسية
Magnetic Effects	الآثار المغناطيسية
Magnetic Field	حقل مغناطيسي

Magnetic Field Intensity	شدة الحقل المغناطيسي
Magnetic Flux	الفيض المغناطيسي
Magnetic Polarization	استقطاب مغناطيسي
Magnetic Voltage	توتر مغناطيسي
Magneto motive Force	قوة محركة مغناطيسية
Magnetization Curve	منحني المغنطة
Matching	توافق
Matching Power	توافق الاستطاعة
Maximum	أعظمي
Maximum Power Transfer	نقل أكبر استطاعة
Maximal Value	القيمة العظمى .
Measuring Of Resistances	قياس المقاومات
Mean Flux	الفيض الأساسي
Mesh Analysis	نظرية الحلقات
Mesh	حلقة
Mesh Current Method	طريقة تيارات الحلقات
Mistuning	الانحراف
Mixed Connecting	التوصيل المختلط
Modification Of Power Factor	تحسين عامل الاستطاعة
Multilayer Capacitor	مكثف متعدد الطبقات
Mutual Inductance	التحريض المتبادل
N	

Negative Ion	شاردة سالبة
Network	شبكة
Neutron	نيوترون
Nodal Analysis	طريقة العقد
Node	عقدة
Node Voltage Method	طريقة توترات العقد
Nonlinear Resistance	مقاومة لا خطية
Non load Voltage	توتر اللاحمل
Non Magnetic Materials	مواد لا مغناطيسية
Norton Theorem	نظرية نورتن
Nucleus	نواة
Number	عدد
O	
Ohms Law	قانون أوم
Open Circuit Theorem	نظرية الدارة المفتوحة
Open Circuit Voltage	توتر الدارة المفتوحة
Operator	عامل
P	
Parallel Connection	الوصل التفرعي
Paramagnetic Materials	مواد مغناطيسية طردية
Parameter	محدد - وسيط
Passive	غير فعال

Passive Element	عنصر غير فعال
Permanent Polarization	استقطاب دائم
Permeability	عامل النفاذ المغناطيسي
Permittivity Of Free Space	عامل النفاذ المغناطيسي في الخلاء
Period	الدور
Phase	الطور
Phase Angle	زاوية الطور
Phase Current	تيار الطور
Phase Voltage	توتر الطور
Phasor Diagram	المخطط الشعاعي
Physiological Effects	الآثار الفيزيولوجية
Pole	قطب
Polar Form	شكل قطبي
Positive Ion	شاردة موجبة
Potential Difference	فرق الكمون الكهربائي
Potentiometer	مقاومة متبدلة
Power	استطاعة
Power Delivered	الاستطاعة المقدمة
Power Factor	عامل الاستطاعة
Power Loss	مفاقيد الاستطاعة
Power Triangle	مثلث الاستطاعات

Principle	مبدأ
Process	عملية
Protection Resistance	مقاومة الحماية
Q	
Quadropole	رباعي أقطاب
Quality	الجودة
R	
Reactance	مفاعلة
Reactive Power	استطاعة ردية
Real	حقيقي
Real Numbers	أعداد حقيقية
Reference Node	عقدة مرجعية
Relationship	علاقة
Relative Permeability	ثابتة النفاذ النسبية
Residual Induction	التحريض المتبقي
Resistance	مقاومة
Resistivity	مقاومة نوعية
Resonance	طنين كهربائي
Rotation Time Vector	شعاع دائر مع الزمن
Rotor	الجزء الدوار
S	
Saturation	الإشباع

Self Inductance	التحريض الذاتي
Semi Conductors	أنصاف النواقل
Series Connection	الوصل التسلسلي
Short Circuit	دارة القصر
Short Circuit Current	تيار دارة القصر
Shunt Resistance	المقاومة المفرعة
Source	منبع
Source EMF Combination	تجميع منابع القوى المحركة الكهربائية
Source Transformation	تحويل المنابع
Star Connection	الوصل النجمي
Star Delta Conversion	التحويل من نجمة إلى مثلث
Stationary Time Vector	شعاع ساكن
Stator	الجزء الثابت
Superposition Principle	مبدأ التراكم
Susceptance	مسايرة
Susceptibility	ثابتة قابلية التأثر
Switch	مفتاح كهربائي
T	
Temperature Coefficient	عامل الحرارة
Temporary Polarization	استقطاب مؤقت
Three Phase System	نظام ثلاثي الطور
Thevenin Theorem	نظرية ثيفينين

Time Constant	ثابت زمني
Toriod	وشيعة حلقية
Transient	عابر
Transient State	حالة عابرة
Transmission Line	خط نقل
Transport Matrix	مصفوفة النقل
Tow Pole Theorem	نظرية ثنائيات الأقطاب
Tow Port	رباعي الأقطاب
U	
Unit	وحدة
V	
Value	قيمة
Variable Current	تيار متغير
Vector	شعاع
Vector Diagram	مخطط شعاعي
Voltage	توتر
Voltmeter	مقياس توتر
Voltage Divider	مقسم التوتر
Voltage Division	تقسيم التوتر
Voltage Droop	هبوط التوتر
Voltage Source	منبع توتر

جدول الرموز العلمية

الرمز	الكمية
q_e	شحنة الإلكترون الواحد
m_e	كتلة الإلكترون الواحد
q	الشحنة الكهربائية
i	القيمة الآنية للتيار الكهربائي
$\bar{I}$	شعاع التيار الكهربائي
$\underline{I}$	القيمة العقدية للتيار الكهربائي
I	التيار الكهربائي المستمر
t	الزمن
I_m	القيمة العظمى للتيار الكهربائي
ω	التردد الزاوي
ω_0	التردد الزاوي للطنين
$\omega_{\pm 45}$	التردد الزاوي لدارة الطنين عند الزاوية ٤٥
f	التردد
f_0	تردد الطنين
$f_{\pm 45}$	التردد لدارة الطنين عند الزاوية ٤٥

الكمون الكهربائي	V
القوة المحركة الكهربائية	e
التوتر الكهربائي المستمر	U
شعاع التوتر الكهربائي	$\overline{U}$
القيمة العقدية للتوتر الكهربائي	$\underline{U}$
القيمة الآنية للتوتر الكهربائي	u
القيمة العظمى للتوتر الكهربائي	U_m
الحقل الكهربائي الساكن	E_v
قوة كولومب	F
ثابتة العازلية الكهربائية في الخلاء	ε_0
ثابتة العازلية المطلقة	ε_r
الكثافة الخطية للشحنات	ρ_l
الكثافة السطحية للشحنات	ρ_s
الكثافة الحجمية للشحنات	ρ_v
الاستقطاب الكهربائي المؤقت	P_t
الاستقطاب الكهربائي الدائم	P_p
العزم الكهربائي المؤقت	p_t
العزم الكهربائي الدائم	p_p
التحريض الكهربائي الساكن	D

ψ_E	التدفق الكهربائي بدلالة الحقل
ψ_D	التدفق الكهربائي بدلالة التحريض
W_e	القدرة الكهربائية المختزنة في الحقل
ω_e	الكثافة الحجمية للقدرة الكهربائية
C	السعة الكهربائية للمكثف
C_p	المكثف التفرعي لتحسين عامل الاستطاعة
C_s	المكثف التسلسلي لتحسين عامل الاستطاعة
τ	الثابتة الزمنية للمكثف
W_c	القدرة المختزنة في المكثف
C_{eq}	السعة الكهربائية المكافئة
$\overline{J}$	شعاع الكثافة الكهربائية للتيار
R	المقاومة الكهربائية
ρ	المقاومة النوعية للمادة
α	المعامل الحراري للمادة
G	الناقلية الكهربائية
γ	الناقلية النوعية للمادة
Z	الممانعة الكهربائية

$\underline{Z}$	الممانعة الكهربائية العقدية
Z_0	الممانعة المميزة لدارة الطنين
Y_0	السماحية المميزة لدارة الطنين
X	المفاعلة الردية
X_L	مفاعلة تحريضية
X_C	مفاعلة سعوية
Y	السماحية الكهربائية
$\underline{Y}$	السماحية الكهربائية العقدية
B	المسايرة الردية
B_L	مسايرة تحريضية
B_C	مسايرة سعوية
δ	ثابت التخامد لدارة الطنين
ρ	جودة الطنين
b_f	عرض المجال المطلق
b_w	عرض المجال النسبي
V	الانحراف عن الطنين
S	الاستطاعة الكهربائية الظاهرية
P	الاستطاعة الكهربائية الفعلية
Q	الاستطاعة الكهربائية الردية

φ	زاوية فرق الصفحة بين التيار والتوتر
$COS\ \varphi$	عامل الاستطاعة
r	المقاومة الداخلية للمنبع
I_{sc}	تيار القصر
U_0	توتر اللاحمل
R_{eq}	المقاومة المكافئة
$\Delta U\%$	هبوط التوتر النسبي
$\Delta P\%$	ضياع الاستطاعة النسبي
R_Y	المقاومة النجمية
R_Δ	المقاومة المثلثية
η	المردود
P_L	استطاعة الحمل
P_G	استطاعة التوليد
KCL	قانون كيرشوف الأول
KVL	قانون كيرشوف الثاني
U_{th}	توتر ثيفينين
R_{th}	مقاومة ثيفينين
I_N	تيار اللاحمل (نورتن)

المراجع العلمية

1-Teoria Obwodow Electrycznych
J. Dziedzic, WNT, Warszawa 1965

2- Liniowe Obwody Electryczne
S. Kurzawa, PWN, Warszawa 1974

3- Liniowe Obwody Electryczne W Stanie Ustalonym
S. Polkowski, WNT, Warszawa 1974

4- Electrotechnika I Electronika
F. Przezdziecki, PWN, Warszawa 1982

5- Electrotechnika Teoretyczna
M. Krakowski, PWN, Warszawa 1983

6- Analiza I Synteza Electrycznych Obwodow Liniowych
K.Mikolajuk Z. Trzaska
PWN, Warszawa 1984

7- Linear Circuit Analysis
S. Madhu, Prentice –Hall,
New Jersy 1988

8- Basic Electrical Engineering
I.J. Nagrath, Tata MC Graw-Hill
New delhi 1991

9- Basic Circuit Analysis
John Stuller, Houghton Mifflin

USA 1991

١٠- أسس الهندسة الكهربائية/٢/

د. محمد علي عثمان د. سميح الجابي جامعــة دمــشق

١٩٨٩

١١- نظرية الدارات الكهربائية /١/

د. عبد الوهاب ترجمان جامعة دمشق ١٩٩١

١٢-الدارات الكهربائية

د. نديم مخول جامعة دمشق ١٩٩٧

١٣- الهندسة الكهربائية

د. نديم شاهين د. نديم مخول د. تيسير حجازي

جامعة دمشق ٢٠٠١

١٤- أسس الهندسة الكهربائية

د. نديم مخول جامعة دمشق ٢٠٠٤

المدققون العلميون

أ.د.م.هاشم ورقوزق

أ.د.م.سميح الجـــابي

أ.د.م. نـــديم مخـــوّل

المدقق اللغوي

د. علي كردي

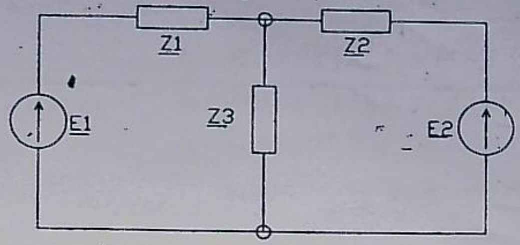
منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية و الكهربائية

الدارات الكهربائية / ١ /

الدكتور
نديم مخول
أستاذ في قسم الطاقة الكهربائية

الدكتور
نبيل صبح
مدرس في قسم الطاقة الكهربائية

١٤٢٧ - ١٤٢٨هـ
٢٠٠٦ - ٢٠٠٧ م
جامعة دمشق



الشكل (٣-٥٥)

الأجوبة:

$\underline{I_1} = 1{,}04.e^{-j20{,}1}[A], \underline{I_2} = 6{,}35.e^{j52}[A], \underline{I_3} = 6{,}7.e^{j43{,}5}[A]$

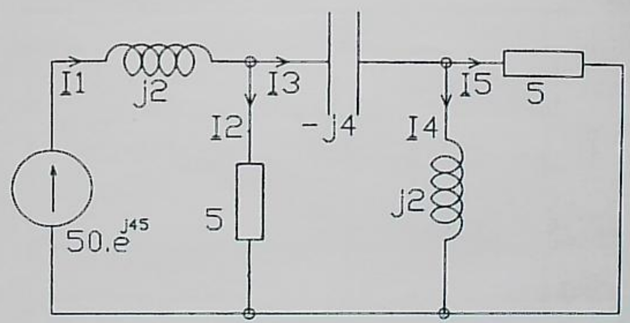
مسألة (٣ – ٦– ٤):

المطلوب إيجاد التيارات المارة في فروع الدارة المبينة في الـــشكل (٣-٥٦م)

وذلك باستخدام:

١- طريقة تيارات الحلقات، ٢- طريقة كمونات العقد

٣- ارسم المخطط الشعاعي لكافة التيارات والتوترات.**[6]**



الشكل (٣-٥٦)

الأجوبة:

$$\underline{I_1} = 38{,}4.e^{j23{,}2}[A], \underline{I_2} = 14{,}9.e^{-j28}[A]$$
$$\underline{I_3} = 31{,}35.e^{j45}[A], \underline{I_4} = 29{,}1.e^{j23{,}2}[A]$$
$$\underline{I_5} = 11{,}65.e^{j113{,}2}[A]$$

مسألة (٣ – ٦–٥):

دارة كهربائية مغذاة من منبع توتر وحيد كما في الشكل (٣–٥٧) وتحوي الأحمال التالية:

$\underline{Z}_{AB} = 10 + j10[\Omega]$, $\underline{Z}_{BG} = 10[\Omega]$, $\underline{Z}_{CH} = 10[\Omega]$

$\underline{Z}_{GE} = -j10[\Omega]$, $\underline{Z}_{HD} = j10[\Omega]$, $\underline{Z}_{FE} = 10 + j10[\Omega]$

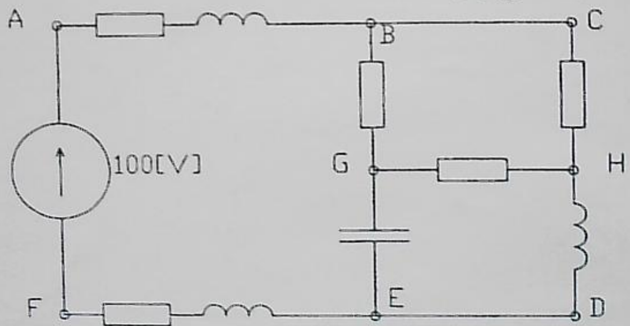
$\underline{Z}_{GH} = 10[\Omega]$, $\underline{E} = 100[V]$

والمطلوب:

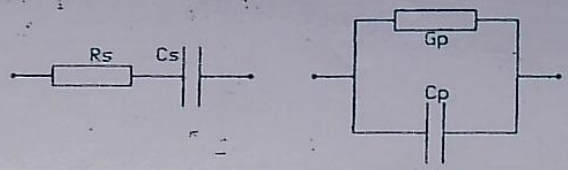
١– حساب التيار المار في الخط CH بطريقة مولد التوتر المكافىء.

٢–حساب التيار المار في الخط CH بطريقة مولد التيار المكافىء.

٣– حساب التيار المار في الخط GH بالطريقتين مولد التوتر المكافئ ومولد التيار المكافئ [9]



الشكل (٣–٥٧)



الشكل (٤-١) التحويل من دارة تسلسلية إلى تفرعية

أ- دارة تسلسلية ب- دارة تفرعية

عند الضرب بمرافق المقام يكون

$$\frac{R_s - jX_s}{R_S^2 + X_S^2} = \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} - j\frac{X_S}{R_S^2 + X_S^2} \qquad (4,2)$$

وبالمقارنة نجد

$$G_P = \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} = \frac{R_S}{Z_S^2} = \frac{1}{R_P} \qquad (4,3)$$

$$R_S . R_P = Z_S^2 \qquad (4,4)$$

$$B_P = -\frac{X_S}{R_S^2 + X_S^2} = -\frac{X_S}{Z_S^2} = -\frac{1}{X_P} \qquad (4,5)$$

$$X_S . X_P = Z_S^2 \qquad (4,6)$$

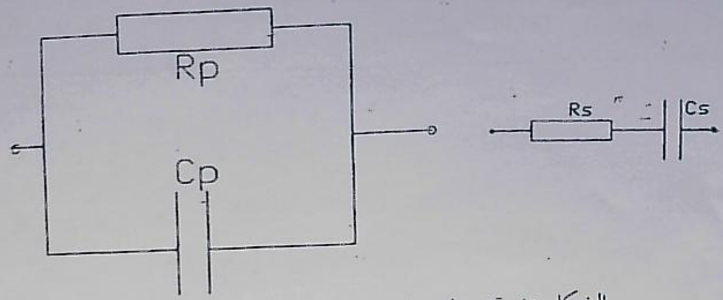
مع ملاحظة أن :

$$B_P = -\frac{1}{X_P} \qquad (4,7)$$

٤-١-٢: التحويل من دارة تفرعية إلى دارة تسلسلية مكافئة :

في هذه الحالة الدارة المعطاة عبارة عن دارة تفرعية **[12]**

$$\underline{Y} = G_p + jB_p \qquad (4,8)$$



الشكل (٤-٢) التحويل من دارة تفرعية إلى تسلسلية

ويكافئ التحويل من دارة تفرعية إلى دارة تسلسلية مكافئة على المأخذين التحويل من $\underline{Y}$ إلى $\underline{Z}$.

$$\underline{Z}=\frac{1}{\underline{Y}}=\frac{1}{G_p+jB_p}=R_s+jX_s \tag{4,9}$$

عند الضرب بمرافق المقام يكون

$$\frac{G_P-jB_P}{G_P^2+B_P^2}=\frac{G_P}{G_P^2+B_P^2}-j\frac{B_P}{G_P^2+B_P^2} \tag{4,10}$$

وبالمقارنة نجد

$$R_S=\frac{G_P}{G_P^2+B_P^2}=\frac{G_P}{Y_P^2}=\frac{1}{G_S} \tag{4,11}$$

$$G_P.G_S=Y_P^2 \tag{4,12}$$

$$X_S=-\frac{B_P}{G_P^2+B_P^2}=-\frac{B_P}{Y_P^2} \tag{4,13}$$

$$B_P.B_S=Y_P^2 \tag{4,14}$$

$$R_S = R_P \cdot \frac{1}{1+(\frac{R_P}{X_P})^2} \quad (4,26)$$

$$X_s = -\frac{B_p}{G_p^2 + B_p^2} \quad (4,27)$$

$$X_S = X_P \cdot \frac{1}{1+(\frac{X_P}{R_P})^2} \quad (4,28)$$

عندما تكون

$$R_P << |X_P| \quad (4,29)$$

فإننا نلاحظ ومن العلاقتين (4,26) و (4,28) أن

$$R_S \approx R_P$$

$$X_S \approx \frac{R_P^2}{X_P} \quad (4,30)$$

أما إذا كانت

$$R_P >> |X_P| \quad (4,31)$$

فإننا نلاحظ ومن العلاقتين (4,26) و (4,28) أن

$$R_S \approx \frac{X_P^2}{R_P}$$

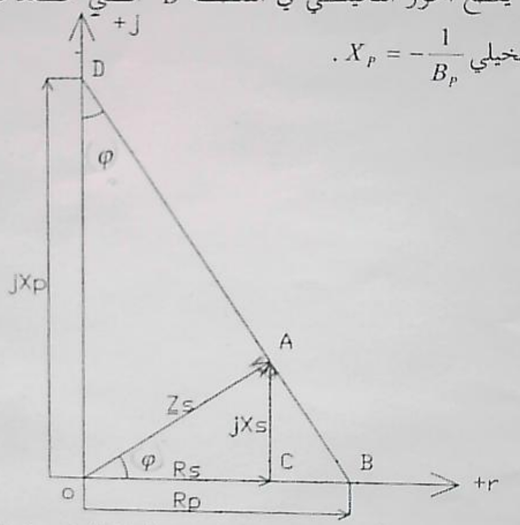
$$X_S \approx X_P \quad (4,32)$$

٤-٣ : التحويل البياني من دارة تسلسلية إلى دارة تفرعية مكافئة وبالعكس:[12]

٤-٣-١ : التحويل من دارة تسلسلية إلى دارة تفرعية بيانياً:

لدينا الممانعة العقدية $\underline{Z} = R_S + jX_S$ ونود معرفة الجزء الحقيقي G_P والجزء التخيلي B_P من السماحية العقدية $\underline{Y}$ بيانياً.

- نرسم الشعاع $\underline{Z} = R_S + jX_S$.
- نرسم عموداً عليه يمر من نهايته ويقطع المحور الحقيقي والمحور التخيلي.
- يقطع المحور الحقيقي في النقطة B التي تحدد قيمة الجزء الحقيقي $R_P = \frac{1}{G_P}$.
- يقطع المحور التخيلي في النقطة D التي تحدد قيمة الجزء التخيلي $X_P = -\frac{1}{B_P}$.



الشكل (٤-٣) التحويل من تسلسلية إلى تفرعية بيانياً

للبرهان على صحة النتائج نكتب ما يلي: